EUCLIDES

vakblad voor de wiskundeleraar

jaargang 88

nr 5

maart 2013

Didactisch onderzoek, deel 4

153

Rekenen

Contexten

Statistiek als Episch Avontuur

CE VMBO

Euclides en de website

Symposium WGRWO

WGRWO

Werkgroep Geschiedenis Reken- en Wiskundeonderwijs



Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

COLOFON

jaargang 88

nr 5

maart
2013

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394



Inzendingen bijdragen
Artikelen en mededelingen naar de hoofdredacteur: Marjanne de Nijs,
Opaal 4, 2719 SR Zoetermeer
E-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen
Tekst liefst digitaal in Word aanleveren; op papier in drievoud. Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.
Zie voor nadere aanwijzingen:
www.nvvw.nl/euclricht.html

Realisatie
Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.
Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
Website: www.nvvw.nl

Voorzitter
Marian Kollenveld,
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
Tel. (070) 390 70 04
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris
Kees Lagerwaard,
Eindhovensingel 15, 6844 CA Arnhem
Tel. (026) 381 36 46
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie
Elly van Bemmel-Hendriks,
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
Tel. (0321) 31 25 43
E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie
NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Postbus 405, 4100 AK Culemborg
Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap
Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor
- leden: € 70,00
- leden, maar dan zonder Euclides: € 40,00
- studentleden: € 35,00
- gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 40,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden
Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Personen (niet-leden van de NVvW): € 65,00
Instituten en scholen: € 145,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 18,00
Betaling per acceptgiro.

Advertenties en bijsluiters
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.
t.a.v. E. van Dijk
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal
Tel. (0318) 555 075
E-mail: e.vandijk@dekleuver.nl

Kort vooraf

[Marjanne de Nijs]

WisBase

In mijn eerste jaar voor de klas ontving ik *Euclides* via de lerarenopleiding. Dat jaar stond in het decembernummer (2001) een informatief artikel van Bram Theune over een toetsdatabase van en voor docenten. Het concept sprak me zeer aan en ik werd direct lid van deze toetsdatabase, WisBase genoemd. De gebruikelijke procedure is dan dat het aspirant-lid een unieke toets aanlevert. Voor een beginnend docent best een obstakel, dus leerzaam. Eenmaal binnen was het verrassend om te zien hoe collega's in den lande hun toetsen samenstelden. De opgaven die ik indertijd van Bram Theune 'leende' voor mijn 4-vwo klas met wiskunde B, gebruik ik nog regelmatig als basis voor een toets. Gelukkig word ik wel steeds beter in het zelf bedenken van varianten. WisBase heeft me regelmatig 'gered' als de werkdruk of het aantal toetsmomenten te groot werd. Ik ben dan ook blij dat deze database door de jaren heen door heel veel vrijwilligers in stand gehouden is. En, zoals bij veel dingen die al even bestaan, komt er ook een tijd voor vernieuwing. Erik van den Hout is sinds 2010 voorzitter van WisBase en hij informeert u er in dit nummer uitgebreid over. We hopen dat u – net als ik indertijd – na het lezen enthousiast genoeg bent om lid te worden, als u dat onverhoopt nog niet mocht zijn.

Lezersforum

U bent van ons gewend dat we u goed informeren over toekomstige en actuele ontwikkelingen. Iets minder vanzelfsprekend is dat we een individuele mening van een auteur publiceren. Allereerst is de doorlooptijd van ons blad te lang in het geval dat lezers willen reageren en daarnaast zijn er andere media die meer geschikt zijn: ik noem de *WiskundE-brief* (*www.wiskundebrief.nl*) en ons eigen lezersforum (zie: *www.nvvw.nl/euclides*). Toch staat in dit nummer een bijdrage van Jaap de Jonge, die een duidelijk eigen opinie heeft over het invoeren van de rekentoets. Of u het met hem eens bent of niet, hij weet zijn standpunt te onderbouwen. Graag reacties naar ons lezersforum. Daar kunt u tevens eigen bijdragen kwijt die u met lezers wilt delen.

HBO

Deze week kwam een aantal dingen samen. Ik gaf mijn 3-havo leerlingen een decaanles: met veel voorbeeldopgaven probeerde ik ze duidelijk te maken wat de verschillen zijn tussen wiskunde A en B (we bieden wiskunde D niet aan). Tegelijk was er op tv veel te doen over het nieuwe werkeloosheidscijfer van 7,5%. Ik zag jonge mensen aankloppen bij uitzendbureaus maar eigenlijk hadden ze geen schijn van kans door een verkeerde studiekeuze. Boven een artikel in mijn landelijke ochtendkrant stond: 'Banen zat, als je techneut bent'. En het rapport *Versterking van de doorstroom en de kwaliteit van het technische HBO* van de Landelijke Werkgroep HBO-Wiskunde van de NVvW verscheen. Roel van Asselt en Christiaan Boudri schreven er al over in *Euclides* (88)3.
Wat leverde deze combinatie op? In ieder geval dat ik zeer gemotiveerd was om het rapport te lezen, en ik kan het iedereen aanraden. Het geeft hele concrete aanbevelingen voor het hbo maar ook voor het vo. En iedere leerling met de juiste capaciteiten die we een goede profielkeuze kunnen adviseren om het technisch hbo in te stromen, is meegenomen. Het hbo en het bedrijfsleven zullen ze met plezier verwelkomen.

NWD

Er zijn voor wiskundedocenten geregeld conferenties en themabijeenkomsten. In *Euclides* en op de NVvW-site informeren we u daar altijd tijdig over en we hopen dat u ze met veel plezier bezoekt. Afgelopen februari waren de jaarlijkse Nationale Wiskundedagen (zie: *www.fisme.science.uu.nl/nwd/*). Voor degenen die er nooit geweest zijn: het is een conferentie van twee dagen die volgepropt zit met lezingen en workshops, maar er is ook een zeer uitgebreide informatiemarkt en een aantrekkelijk avondprogramma waar ook ruimte is om met collega's informeel bij te praten. Tien jaar geleden bezocht ik deze dagen voor het eerst en kwam met een hoofd en tas vol inspiratie thuis – inmiddels heb ik geen jaar overgeslagen en is de NWD voor mij een belangrijk nascholingsevenement. Lezingen op niveau leveren de fascinatie voor ons mooie vak en voor de dagelijkse praktijk zijn er workshops met een inhoud en werkvorm die direct in de klas toepasbaar zijn. Ook de redactie van *Euclides* streeft beide – fascinatie en praktische invulling – na bij de samenstelling van ons blad. Met het goedgevulde nummer dat voor u ligt, hopen we daarin weer geslaagd te zijn.
We wensen u veel leesplezier!

Inhoud

213 Kort vooraf [Marjanne de Nijs]
214 Klein vakdidactisch onderzoek Algebra, deel 4 [Gert Hoogeboom, Ton Konings]
218 $1^3 + 5^3 + 3^3 = 153$ [Bert Boon]
219 Oproep(en)
220 Vragen bij de centrale examens wiskunde vmbo [Truus Dekker]
224 Opkomst en ondergang van de rekentoets [Jaap de Jonge]
227 Wiskunde en autisme, deel 4 [Bram Arens, Danny Beckers]
230 Rekenen in het vmbo [Kees Buijs, Victor Schmidt]
232 Statistiek als Episch Avontuur [Daan van Schalkwijk]
234 De eerste ronde van NWO 2013 [Birgit van Dalen]
236 Contexten als basis voor wiskundig redeneren [Irene van Stiphout, Geeke Bruin-Muurling]
238 Legoman [Desiree van den Bogaart]
240 WisBase.nl [Erik van den Hout]
242 Negatieve getallen [Frans Ballering, Nafees Rehman]
244 Getuigen [Danny Beckers]
247 Uitdagende problemen [Jacques Jansen]
250 De stelling van Pythagoras voor …, deel 2 [Yvonne Killian]
252 Vanuit de oude doos [Ton Lecluse]
253 VMBO (digi)talige examens / aanvulling [Klaske Blom]
254 Boekbespreking / Het Labyrint van Occam [Leon van den Broek]
256 Wiskunde digitaal [Lonneke Boels]
257 Aankondiging / Symposium WGRWO [Harm Jan Smid]
258 Een goed begin is … [Erika Bakker]
259 Boekbespreking / Nummers in New York [Ingrid Berwald]
260 Registerleraar.nl – het vervolg [Marianne Lambriex]
262 Van de bestuurstafel / Euclides en de website [Johan Gademan]
264 Recreatie [Wobien Doyer, Lieke de Rooij]
268 Servicepagina

Klein vakdidactisch onderzoek Algebra

DEEL 4

[Gert Hoogeboom en Ton Konings]

Dit artikel is het vierde artikel in een serie van zes over 'klein vakdidactisch onderzoek Algebra'. De artikelen zijn geschreven als afsluiting van een cursus Vakdidactiek Algebra[1] aan de tweedegraads lerarenopleiding wiskunde van het Instituut voor Leraar en School van de HAN in Nijmegen. De deeltijdstudenten, meestal beginnende docenten, schreven een artikel naar aanleiding van ervaringen in de klas. Aan de hand van de bestudeerde theorie analyseerden ze die ervaringen, ze maakten voornemens en konden die soms ook nog uitvoeren. In viertallen becommentarieerden ze elkaars werk. Vijf artikelen werden geselecteerd voor plaatsing in Euclides en werden daartoe in samenwerking met de docent, Ton Konings, nog grondig[2] bewerkt. Daarover meer in het laatste artikel van de serie.

Bang voor breuken, niet voor wortels?

Zelfs vwo-leerlingen zoeken houvast in hun rekenmachine

De titel suggereert dat het artikel niet over algebra gaat. Het cursusboek[1] echter bevat de paragraaf '1.7 Van rekenen naar algebra', waarin wordt opmerkt dat algebra gezien kan worden als een veralgemenisering van bewerkingen die bij rekenen worden gehanteerd. Deze paragraaf bevat de aanbeveling dat de docent per onderwerp de relatie tussen rekenen en algebra bestudeert en de overgang zo soepel mogelijk vormgeeft. In latere klassen komen breuken voor in vormen als:

$\frac{180(x-2)}{x}$ en $\frac{5}{x}:\frac{15}{x^2}$

Je wenst dat niet klakkeloos de x boven en onder het deelteken worden weggestreept en dat men niet schrikt van het delen door een breuk. Dan moet er wel een basis gelegd en onderhouden zijn.

Probleemsituatie: breuken in de brugklas

Sinds september 2010 geniet ik het voorrecht te verkeren in het gezelschap van een groep bijzonder getalenteerde leerlingen, klas t1D, tweetalig vwo, van het Kandinsky College in Nijmegen. De klas was buitengewoon vaardig bij de algebra-onderwerpen, zoals negatieve getallen en formules. Er was één taboe: gebroken getallen.

In februari 2011 was hoofdstuk 5 'Getallen'[3] aan de beurt. Het hoofdstuk behandelt in twee paragrafen breuken op eenvoudig niveau, herhaling van leerstof van de basisschool: optellen, aftrekken en het bijbehorende gelijknamig maken van de breuken; breuken vermenigvuldigen met als product de breuk met als teller het product van de tellers van de factoren en als noemer het product van de noemers van de factoren.

Na twee paragrafen over breuken volgt paragraaf 5-3 'Decimale getallen' en dan dient volgens de leermethode een rekenmachine gebruikt te worden bij het maken van opgaven als:

Schrijf de volgende breuken als decimaal getal; rond af op twee decimalen.

a. $\frac{4}{7}=\ldots$ ***b.*** $\frac{5}{6}=\ldots$ ***c.*** $\frac{5}{12}=\ldots$

d. $\frac{5}{23}=\ldots$

Als ik toen had geweten wat ik nu wist, dan had ik deze paragraaf overgeslagen. Ik raakte gealarmeerd door opmerkingen van leerlingen, toen ik later voor de klas een opgave uitrekende met als uitkomst $\frac{5}{12}$.

Er werden vragen gesteld, als 'Wat komt er nu uit?' en 'Wat moet je nu als antwoord opschrijven?'

Ik miste in het boek enkele vaardigheden, die ik noodzakelijk acht. Daarom besteedde ik aan het einde van het hoofdstuk twee lessen aan leerstof over breuken met zelf gefabriceerde werkbladen. De onderwerpen waren:

- Gelijknamig maken van breuken via kleinste gemeenschappelijke veelvoud van de noemers.
- Breuken vereenvoudigen alvorens breuken te vermenigvuldigen.
- Delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk.

Ik heb in deze lessen bijvoorbeeld onderstaande bewerkingen behandeld:

a. $\frac{1}{14}+\frac{2}{21}=\frac{3}{42}+\frac{4}{42}=\frac{7}{42}=\frac{1}{6}$

b. $\frac{15}{22}\times\frac{11}{15}=\frac{15\times11}{22\times15}=\frac{1\times11}{22\times1}=\frac{11}{22}=\frac{1}{2}$

c. $\frac{3}{7}:\frac{3}{14}=\frac{3}{7}\times\frac{14}{3}=\frac{3\times14}{7\times3}=\frac{1\times14}{7\times1}=\frac{14}{7}=2$

d. $2\frac{1}{3}:3=\frac{7}{3}:3=\frac{7}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{7}{9}$

De rekenmachine moest in de tas blijven en dat gaf onmiddellijk onrust en problemen bij het aanpakken van opgave a:

$\frac{1}{14}+\frac{2}{21}=\frac{1\times21}{14\times21}+\frac{2\times14}{21\times14}=?$

Het was te verwachten, want ze hadden geleerd:

$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{1\times6}{4\times6}+\frac{1\times4}{6\times4}=\frac{6}{24}+\frac{4}{24}=\frac{10}{24}=\frac{5}{12}$

Problemen van vergelijkbare aard dienden zich aan bij opgave b. Vereenvoudigen, voordat de vermenigvuldiging van tellers en noemers wordt uitgevoerd, dat hadden ze nog nooit gezien en dat wilden ze eigenlijk maar zo houden, immers:

'Met de rekenmachine was het tenminste mogelijk om al die sommen eindelijk eens uit te rekenen.'

Nu pas begreep ik wat de leerlingen in een eerder stadium bedoelden: een breuk was voor hen een onafgemaakte berekening. Een groot aantal van de leerlingen kon een aantal frequent voorkomende breuken weergeven als decimaal getal en voor hen gold $\frac{1}{3}=0{,}33$, met daarbij aan jezelf de keuze om het aantal decimalen te bepalen. Breuken introduceren als een getalsoort, dat was in ieder geval niet gelukt in de lesperiode van het hoofdstuk over getallen. De leerlingen klaagden, ze vonden het moeilijk en ze zagen er het nut niet van in. Na die lessen gaf ik een moeilijke schriftelijke overhoring. Velen haalden hiervoor helaas hun laagste cijfer voor wiskunde.



Analyse vanuit vakdidactische literatuur

In het cursusboek [1] herkende ik mijn probleemsituatie in de passage op pagina 15: ‘Symbolen als het minteken, het wortelteken of het breukteken geven enerzijds een toestand aan, anderzijds het signaal om een bewerking uit te voeren. Wortelgetallen en breuken als decimaal getal schrijven is handig in toepassingssituaties, maar belemmert verder getalbegrip, variabele- en functiebegrip. Hier moeten keuzen gemaakt worden afhankelijk van het schooltype.’ Hierover vond ik in andere literatuur aanvullende informatie.

Op de basisschool hebben toekomstige havo- en vwo-leerlingen volgens Dekker en Kindt (zie [4]) in beperkte mate met breuken leren rekenen. In de brugklasboeken wordt meestal één (deel van een) hoofdstuk aan breuken besteed. Vaak ontbreekt redeneren over breuken en uitleg over uitbreiding van het getalsysteem. Vermenigvuldigen met gemengde breuken staat in de meeste boeken met de rekenmachine en dat geldt ook voor delen met breuken. Inmiddels wordt daar in rekenmethoden of in de nieuwste uitgaven van de wiskundemethoden meer aandacht aan besteed, maar op mijn school was dat begin 2011 nog niet het geval.

Probleemsituatie: het vervolg in de brugklas

Einde schooljaar 2010-2011 was klas t1D toe aan het onderwerp vergelijkingen [3]. Als de oplossing van een lineaire vergelijking geen geheel getal was, dan was het al een hele strijd om bij het oplossen van bijvoorbeeld $3x = 2$, als antwoord een breuk te vragen in plaats van een afronding.

In het leerboek wordt onderscheid gemaakt tussen:

- *exacte oplossing:* een geheel getal, een breuk of een gemengde breuk.
- *benadering:* een eventueel afgerond, decimaal getal berekend met de rekenmachine.

In het leerboek wordt nog expliciet vermeld dat het overnemen van de display van je rekenmachine niet hetzelfde is als een exacte oplossing. Ondanks mijn nadrukkelijke aandacht hiervoor in lessen noteerden (te) veel leerlingen bij de toets als exacte oplossing de gehele display van hun rekenmachine.

Vervolg analyse vanuit de literatuur

Volgens Dekker en Kindt (in [4]) valt er wel iets aan te merken op de leermethoden:

- Los op: $\frac{2}{3}x = 11$
- Antwoord: $x = 11 : \frac{2}{3} = 16{,}5$

Bij deze opgave staat in het boek uitleg hoe de deling met de rekenmachine wordt uitgevoerd. Waarom wordt de leerling hier geen kans geboden zelf na te denken over de geschikte strategie? Er worden in de eerste twee leerjaren van havo en vwo kansen gemist om het inzicht in het rekenen met breuken te verdiepen en later problemen te voorkomen. Dekker en Kindt schetsen in [4] een ‘rampscenario’:

‘Voor veel leerlingen in de bovenbouw is het beslist niet vanzelfsprekend dat $\frac{\pi}{2}$ gelijk is aan $\frac{1}{2}\pi$.’

Onlangs kreeg ik in 4-vwo nog de vraag:

‘Meneer, $\frac{1}{6}x$ is dat gelijk aan $\frac{x}{6}$ of toch niet?’

De kern van het probleem

Door de literatuur ben ik bevestigd in mijn opvatting dat, als basis voor het latere algebraonderwijs, voor havo- en vwo-leerlingen in het basisonderwijs en in de leerboeken van de brugklas te weinig aandacht wordt geschonken aan kennis over eigenschappen van breuken, formele bewerkingen met breuken en rekenen zonder rekenmachine. Te snel inzetten van de rekenmachine geeft een verschraald getalbegrip.

Hoewel de schoolmethoden de waarschuwingen van Dekker en Kindt ter harte lijken te nemen, blijft er voor een docent nog wel uitdaging in het zorgen voor aanvullende oefening, het onderhouden van getalbegrip waar dat mogelijk is en het blijven stellen van eisen. Dit geldt vermoedelijk ook voor het te ontwikkelen getalbegrip bij wortelvormen. Na de ervaringen met breuken was ik gewaarschuwd.

Het vervolg in klas 2-vwo

September 2011, inmiddels heet de klas t1D alweer klas t2D. De leerlingen van t2D vinden breuken nog steeds eng en gaan ze zoveel mogelijk uit de weg.

Aan het begin van het schooljaar werden irrationale getallen geïntroduceerd. Irrationale getallen maken nauwelijks deel uit van het dagelijks leven: ¼ pizza is wel een begrip, maar √2 pizza’s is niet relevant, in welke context dan ook. Er was dus geen voorkennis van irrationale getallen. De leerlingen hadden nog geen weerstand opgebouwd voor deze getalsoort. Bovendien wisten ze nu wat ik van ze verwachtte: rekenmachines in de tas. Ik wilde eerst gezonde omgang van de leerlingen met deze nieuwe soort getallen. Afronden van wortelvormen kon later ook nog ter sprake worden gebracht bij berekeningen met de stelling van Pythagoras in de opgaven met praktische contexten.

Werkbladen

Als aanvulling op de leerstof aangeboden door de methode, heb ik werkbladen [5] geschreven:

- Breuken (met herhaling van klas 1-vwo);
- Wortels & Haakjes.

Elk werkblad bevat oefening en theorie voor één les inclusief huiswerk. Gebruik van de rekenmachine bij deze opgaven was vanzelfsprekend niet toegestaan. Onderstaande voorbeelden zijn representatief voor het eindniveau van het werkblad Wortels & Haakjes.

a. $\sqrt{7} \times \sqrt{5} \times \sqrt{35} = ...$
b. $(\sqrt{37})^2 = ...$
c. $\sqrt{20} + \sqrt{45} = ...$
d. $(3 + 4\sqrt{7})(2 + \sqrt{7}) = ...$
e. $(3\sqrt{2} + \sqrt{7})(\sqrt{2} + 3\sqrt{7}) = ...$

Opbrengst

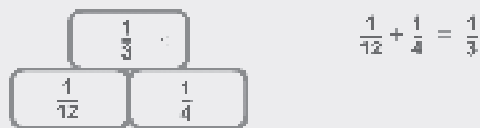
Bij de eerste twee proefwerken van dit schooljaar heb ik hogere eisen gesteld aan het niveau van de rekenvaardigheden. Met een schriftelijke overhoring enkele weken later over het rekenen met irrationale getallen heb ik deze rekenvaardigheden nog eens onder de aandacht van de leerlingen gebracht.

De resultaten bij deze overhoring waren ruim boven verwachting. Enkele weken later bij een proefwerk over de stelling van Pythagoras werden irrationale uitkomsten, waar een benadering gevraagd werd, eerst exact weergegeven en netjes vereenvoudigd. Dit proefwerk was voor t2D de derde proeve over irrationale getallen. Zo snel kunnen dus al zeer aansprekende resultaten worden geboekt.

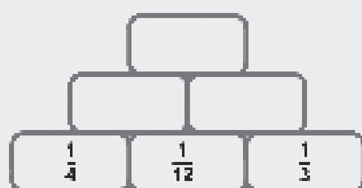
Ook bij het onderwerp kwadratische formules en kwadratische vergelijkingen plaatste ik het accent op het exact oplossen van de vergelijkingen zonder gebruik van een rekenmachine en ditmaal zonder noemenswaardige weerstand van de leerlingen.

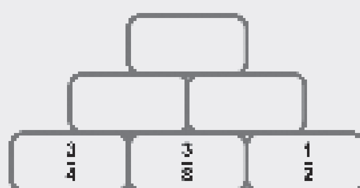
Breukenmuurtjes

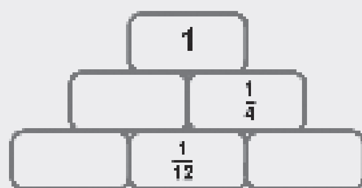
Spelregel: tel de getallen op twee 'buurstenen' bij elkaar op en schrijf het antwoord op de steen die op die twee stenen rust.

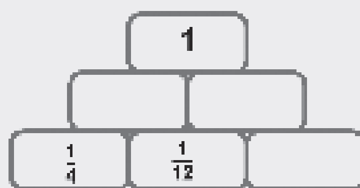


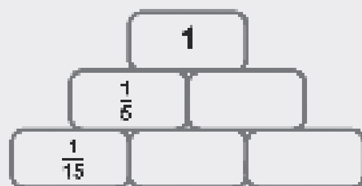
9. Vul de ontbrekende breuken of helen op de stenen in.

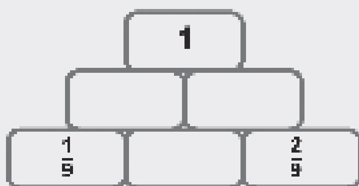




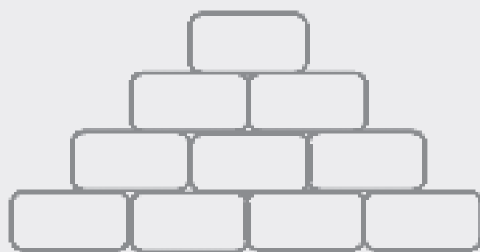








10. Maak nu zelf een breukenmuurtje met een *heel getal* in de bovenste steen.



figuur 1 Bron: [7]; pag. 24

Nabeschouwing

Gestimuleerd door succes met mijn leerlingen en feedback op dit artikel vanuit de lerarenopleiding, ben ik toe aan verbetering van mijn werkbladen. Waar de werkbladen nadruk leggen op oefenen van eenvoudig naar complex, is verbetering mogelijk in begripsmatig opzicht.
Dekker en Kindt stelden de bundel *Oefenen met Breuken* [7] samen, met oefenopgaven en uitdagende problemen 'voor leerlingen die meer kunnen'. De bundel bevat zogenoemde 'productieve oefeningen', gevarieerde oefeningen waarbij begrip van leerlingen wordt aangesproken en uitgedaagd. Dit was voor mij een mooie tip voor een volgende versie van mijn werkbladen in klas 1. Ik heb mijn oorspronkelijke werkbladen ingekort en aangevuld met oefeningen uit deze bundel. Een voorbeeld van een werkblad staat in figuur 1, en inderdaad: in plaats van 'bang te zijn voor breuken' laten mijn leerlingen zich nu uitdagen!

Noten

[1] Bij de cursus werd gebruik gemaakt van een conceptversie van:
J. Faarts, e.a. (2012): *Algebra voor leerlingen van 12-16, voor de lerarenopleiding.* Utrecht: APS.

[2] Dit geldt niet voor dit artikel, dat al bij inleveren als uitstekend beoordeeld werd.

[3] *Moderne Wiskunde, vwo*, deel 1A en 1B, editie 9. Groningen: Noordhoff, 2007.

[4] T. Dekker, M. Kindt (2006): *Wat doen we (niet) met breuken?* In: *Nieuwe Wiskrant* 26(2); pp. 6-10.

[5] De werkbladen zijn op te vragen bij de auteurs.

[6] T. Dekker, M. Kindt (2010): *Productief oefenen met breuken?* In: *Nieuwe Wiskrant* 29(3); pp. 4-8.

[7] T. Dekker, M. Kindt (2010): *Oefenen met breuken.* Utrecht: Freudenthal Instituut.
Deze bundel is geschikt om in de brugklas havo en vwo te gebruiken.

Over de auteurs
Gert Hoogeboom, TU Delft Ir. scheikundige technologie (1987); KABK Den Haag fotografische vormgeving (1993); process engineer, ingenieursbureau (tot 1997); freelance fotograaf. Vanaf 2009 is hij werkzaam als leraar wiskunde bij het Kandinsky College Nijmegen. Hij was in studiejaar 2010-2011 en 2011-2012 deeltijdstudent aan de tweedegraads lerarenopleiding wiskunde van het Instituut voor Leraar en School van de HAN in Nijmegen. Nu doet hij daar de masteropleiding tot eerstegraads docent wiskunde.
E-mailadres: *g.hoogeboom@kandinsky.nl*
Ton Konings is lerarenopleider aan het Instituut voor Leraar en School van de HAN in Nijmegen, en medeauteur van een serie vakdidactiekboeken voor de tweedegraads lerarenopleiding wiskunde.
E-mailadres: *Ton.Konings@han.nl*

$1^3 + 5^3 + 3^3 = 153$

[Bert Boon]

Geïnspireerd door de special van 'Euclides' over 'Getallen' onderzocht Bert Boon de bijzondere eigenschappen van het getal 153. In dit artikel neemt hij u mee langs de mooie resultaten.

Nog eens bladerend in de prachtige getallenspecial [1] kwam ik op bladzijde 22 het getal 153 tegen. Daar werd opgemerkt dat 153 een *narcistisch getal* is omdat de som van de derde machten van de cijfers weer 153 is. Ook werden enkele voorbeelden gegeven van getallen waarbij het herhaald uitvoeren van het optellen van de derde machten (in dit artikel 'de procedure' genoemd) van de cijfers weer op 153 uitkomt, bijvoorbeeld:
$567 \rightarrow 684 \rightarrow 792 \rightarrow 1080 \rightarrow 513 \rightarrow 153$
Aan de lezer werd het overgelaten om zelf meer getallen te vinden die met deze procedure uitkomen op 153. Dat is niet zo moeilijk als je weet dat elk getal dat deelbaar is door 3, met deze procedure uitkomt op 153. Het getal 3 zelf zelfs heel snel:
$3 \rightarrow 27 \rightarrow 351 \rightarrow 153$
Hoe komt dat?
Wel, het geheim zit hem in twee regels:

- als een getal deelbaar is door 3, is de som van de cijfers ook deelbaar door 3;
- de derde macht van een getal geeft bij deling door 3 dezelfde rest als het getal zelf.

Dat betekent dat als je de procedure uitvoert op een willekeurig getal, alle getallen in die rij bij deling door 3 dezelfde rest op zullen leveren.
Dan moet je nog uitzoeken hoe de procedure kan eindigen. Hij kan natuurlijk uitkomen op een getal dat zelf gelijk is aan de som van de derde machten van zijn cijfers, maar het is ook denkbaar dat de procedure in een cyclus eindigt.
Voordat we daarnaar kijken, is het leerzaam eerst eens te kijken naar wat er gebeurt als je herhaaldelijk de *kwadraten* van de cijfers optelt.

Kwadraten

Gelukkig hoeven we dat niet voor alle getallen uit te zoeken. Noemen we $S(n)$ de som van de kwadraten van de cijfers van het getal n, dan kun je opmerken dat voor een getal n van vier cijfers geldt:
$S(n) \leq S(9999) = 324$
Voor grotere getallen is de 'val' nog spectaculairder.
Bij ons onderzoek kunnen we ons dus beperken tot getallen kleiner dan 1000.

- Voor getallen van drie cijfers geldt: $S(n) \leq S(999) = 243$.
- Voor $n \leq 243$ geldt: $S(n) \leq S(199) = 163$.
- Voor $100 \leq n \leq 163$ geldt: $S(n) \leq S(159) = 107$.
- Voor $100 \leq n \leq 107$ geldt: $S(n) \leq S(107) = 50$.

Zo zie je dat voor $n > 100$ de procedure in enkele stappen een getal kleiner dan 100 oplevert.
Ons onderzoek kan beperkt worden tot getallen kleiner dan 100. Dat is nog best wat werk. Je kunt het beperken door op te merken dat als n een getal is met $S(n) > 100$, de procedure binnen enkele stappen een getal kleiner dan 51 oplevert.
Met enig geduld of een leuk computerprogramma kom je er achter dat de procedure altijd eindigt op 1 of op de cyclus van het getal 4:
$4 \rightarrow 16 \rightarrow 37 \rightarrow 58 \rightarrow 89 \rightarrow 145 \rightarrow 42 \rightarrow 20 \rightarrow 4$
En passant heb je dan ook aangetoond dat 1 het enige getal is waarvoor geldt $S(n) = n$.

Terug naar derde machten

$S(n)$ is nu de som van de derde machten van de cijfers van het getal n.
Het onderzoek is nu aanzienlijk lastiger.
Bekend is dat er vijf getallen zijn waarvoor $S(n) = n$, namelijk [2]:
1, 153, 370, 371 en 407
We kijken hoe de procedure eindigt.
Dat kan dus doordat we op één van de genoemde getallen uitkomen of doordat we in een cyclus terecht komen.
Laten we ter oriëntatie eens naar de getallen 2, 3 en 4 kijken:

- $2 \rightarrow 8 \rightarrow 512 \rightarrow 134 \rightarrow 92 \rightarrow 737 \rightarrow 713 \rightarrow 371$
- $3 \rightarrow 27 \rightarrow 351 \rightarrow 153$
- $4 \rightarrow 64 \rightarrow 280 \rightarrow 520 \rightarrow 133 \rightarrow 55 \rightarrow 250 \rightarrow 133 \rightarrow 55$

We zien meteen al de getallen 153 en 371 verschijnen en een cyclus:
$55 \rightarrow 250 \rightarrow 133 \rightarrow 55$
Dat is dus ook een manier om de 'stationaire' getallen op te sporen. Bij 7 vind je 370 en bij 47 vind je 407, maar je weet dan nog niet of dat alle stationaire getallen zijn.

Het onderzoek verloopt in grote lijnen net zo als bij de kwadraten: we passen de procedure toe op een getal n totdat het resultaat gelijk of kleiner is dan n. Zo dalen we af naar $n = 1$.

- Voor getallen van vijf cijfers geldt: $S(n) \leq S(99999) = 3645$.
- Voor getallen van vier cijfers geldt: $S(n) \leq S(9999) = 2916$.
- Voor $2000 \leq n \leq 2916$ geldt: $S(n) \leq S(2899) = 1978$.

Je kunt het onderzoek dus beperken tot getallen onder de 2000.
Eerst bekijk je $1000 < n < 2000$. Doordat derde machten tamelijk ver uit elkaar liggen, hoef je in elk honderdtal eigenlijk maar een paar getallen te controleren.
Neem bijvoorbeeld $1900 \leq n \leq 2000$.
Je hoeft alleen die n te controleren waarvoor $S(n) > 1900$: 1999, 1998 en 1989. Net zo:

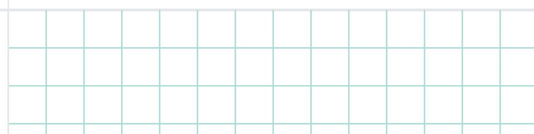
- $1800 \leq n \leq 1900$: $S(n) > 1800$: 1899
- $1700 \leq n \leq 1800$: $S(n) > 1800$: 1799

Enzovoort.
Resultaat is dat je aantoont dat de procedure voor $n > 1000$ na een paar stappen altijd een getal kleiner dan 1000 oplevert.

Voor $100 < n < 1000$ is het ook zweetwerk of een computerprogramma.
Maar uiteindelijk vind je dat de procedure altijd eindigt op 1, 153, 370, 371 of 407 of op één van de volgende cycli:

- $55 \rightarrow 250 \rightarrow 133 \rightarrow 55$
- $136 \rightarrow 244 \rightarrow 136$
- $160 \rightarrow 217 \rightarrow 352 \rightarrow 160$
- $919 \rightarrow 1459 \rightarrow 919$

Alle cycli bevatten getallen die bij deling door 3 rest 1 geven.



Conclusie

- Getallen deelbaar door 3 eindigen altijd op 153.
- Getallen die bij deling door 3 rest 1 geven, eindigen op 1, 370 of in een cyclus.
- Getallen die bij deling door 3 rest 2 geven, eindigen op 371 of 407.

Noten

[1] K. Blom, D. Klingens (red.): *Getallen / Euclides Special 2012*. Amsterdam: NVvW (2012).

[2] Zie bijvoorbeeld: David Wells (1991): *Woordenboek van eigenaardige en merkwaardige getallen.* Amsterdam: Bert Bakker.

Over de auteur

Bert Boon was tot 2010 docent aan het Christelijk Gymnasium Sorghvliet.
E-mailadres: *aw.boon@casema.nl*

OPROEP / Veldraadpleging syllabi

Nieuwe wiskunde B (havo/vwo)

Van 4 maart 2013 tot en met 14 april 2013 organiseert het College voor Examens (CvE) een veldraadpleging rondom de syllabi bij de nieuwe examenprogramma's wiskunde B voor havo en vwo. Docenten vo, vakdidactici en andere vakdeskundigen kunnen hun mening geven over deze syllabi.
Er is een e-mailbericht gestuurd naar zoveel mogelijk betrokkenen.

Mocht u zo'n bericht niet hebben ontvangen, dan kunt u zich aanmelden via de website van het CvE (*www.cve.nl*).
Na aanmelding ontvangt u een e-mailbericht met een link naar de enquêtes waarvoor u zich heeft aangemeld. U hebt dan tot en met **14 april a.s.** de tijd om de enquêtes in te vullen.

OPROEP /

Pythagoras-prijsvraag 2012-2013

De wedloop om de Zuidpool
Pythagoras, het wiskundetijdschrift voor jongeren, kent een lange geschiedenis van prijsvragen. Veelal waren deze prijsvragen gebaseerd op het rekenen met getallen maar ook meetkunde komt veel voor.
Ditmaal kijkt *Pythagoras* met de 'Poolreis-prijsvraag' naar de exponentiële functie. Hoe kan je succesvol een tocht naar de Zuidpool ondernemen?
De prijsvraag (het artikel in *Pythagoras*) is te vinden op:
www.pythagoras.nu/pyth/pdf/artikel_50211_4-5.pdf

Oplossingen van leerlingen moeten **vóór 15 april a.s.** bij de redactie van *Pythagoras* binnen zijn.

De redactie van *Pythagoras* stelt het erg op prijs wanneer u uw leerlingen stimuleert om mee te doen aan een of meer onderdelen van de prijsvraag, die zeker ook geschikt is voor leerlingen uit de onderbouw.
Ook is ze benieuwd naar wat u als docent van de prijsvraag vindt. Ze zien de oplossingen van uw leerlingen en uw reacties met veel plezier tegemoet.

Een handreiking aan (stimulerende) docenten – geschreven door Matthijs Coster, redacteur van *Pythagoras* – is te vinden via:
www.nvvw.nl/media/downloads/eucl(885)zuidpool.pdf

E-mailadres: *prijsvraag@pythagoras.nu*

Vragen bij de centrale examens wiskunde vmbo

[Truus Dekker]

Inleiding
Het gebeurt niet vaak dat er, namens het College voor Examens (CvE, voorheen CEVO), een artikel verschijnt in *Euclides* over de centrale examens wiskunde vmbo. Daar is ook zelden een reden voor. Het aantal inhoudelijke vragen dat het CvE naar aanleiding van deze examens ontvangt is niet groot en ook de belangstelling voor de examenbesprekingen die de NVvW organiseert is beperkt. Volgens de NVvW wordt bij het corrigeren van examens wel veel gebruik gemaakt van het forum op de website van de vereniging.
De opmerkingen die tijdens de examenbesprekingen door docenten worden gemaakt en de algemene opmerkingen van het forum worden gebruikt door het CvE om toekomstige examens te (laten) verbeteren. Het is voor het CvE belangrijke informatie en samen met de Cito-medewerkers doen we ons best om de examens zo goed mogelijk te maken, hoe verschillend het wiskundeonderwijs op de scholen soms ook mag zijn.

Het College voor Examens (CvE) is een zelfstandig bestuursorgaan dat onder meer verantwoordelijk is voor de centrale examens. Het CvE maakt de centrale examens niet zelf, dat doet Cito in opdracht van het CvE. Het CvE geeft daarbij inhoudelijke aanwijzingen en stelt de centrale examens vast. Dat laatste is de taak van een vaststellingscommissie die uit ervaren docenten bestaat die zelf ook wiskundelessen verzorgen in examenklassen.

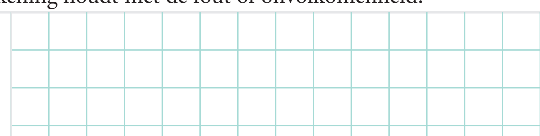
Waarom dan nu toch een artikel in *Euclides* als er niet veel problemen zijn? Na de centrale examens ontvangt het CvE regelmatig vragen en opmerkingen van docenten/correctoren waaruit blijkt dat sommige docenten onzeker zijn over wat ze nu wel of niet goed mogen rekenen, hoe streng ze moeten omgaan met het correctievoorschrift en of nu het gebruikte lesboek dan wel een examenmaker bepaalt wat er in een centraal examen gevraagd mag worden. Op die algemene vragen proberen we in dit artikel een antwoord te geven. Die antwoorden gelden zowel voor de 'papieren' examens als voor de digitale examens op BB-niveau en KB-niveau.

Algemene informatie over de centrale examens in het voortgezet onderwijs is te vinden op *www.examenblad.nl* .
Elk vak heeft daar een eigen vakpagina met informatie per examenjaar. Dus weet u niet of leerlingen bij de digitale examens een kladblaadje mogen gebruiken of hun eigen rekenmachine, u kunt het op 'examenblad' vinden. Daar vindt u ook de syllabus wiskunde met toelichting waarin bijvoorbeeld staat dat de domeinen 'informatieverwerking en statistiek' en 'geïntegreerde wiskundige activiteiten' verplicht getoetst worden in het schoolexamen maar niet in het centraal examen. Na de examens worden op de vakpagina wiskunde de centrale (papieren) examens gepubliceerd, inclusief het correctievoorschrift.
De vakpagina voor 2013 vindt u als volgt op *www.examenblad.nl*: kies jaarring 2013, kies vmboTL (of GL of KB of BB), kies exacte vakken, kies wiskunde.
Een antwoord op enkele meer specifieke algemene vragen volgt hieronder.

Een vraag uit het examen komt niet voor in het lesboek dat op school wordt gebruikt
Het CvE krijgt soms reacties van docenten die denken dat een bepaalde examenvraag niet gesteld had mogen worden, omdat deze niet in de door hen gebruikte methode voorkomt.
De exameneisen volgens de syllabus en de toelichting daarop (en niet de lesmethode!) bieden dan uitsluitsel. De minister heeft voor elk examenvak de examenprogramma's op hoofdlijnen vastgesteld. In de syllabus geeft het CvE een beschrijving van de exameneisen voor het centraal examen in elk vak. Deze syllabus is bedoeld om u als docent houvast te bieden over wat er geleerd moet worden, want op basis van de syllabus worden de examens gemaakt.
U vindt de syllabus voor 2013 op de vakpagina op *www.examenblad.nl* .
Overigens geldt dat de situaties (contexten) waarover wiskundige vragen worden gesteld, niet altijd bekend zullen zijn voor de leerlingen. Van de leerlingen wordt verwacht dat ze hun wiskundekennis (ook) kunnen toepassen in voor hen onbekende situaties.

Docenten kunnen na het examen vragen over opgaven en correctievoorschriften van de centrale examens stellen via de examenlijn van het CvE. Op de website van het CvE wordt aangegeven op welke manier dat kan.
De examenlijn is uitsluitend bedoeld voor vragen over de opgaven en het correctievoorschrift van het centraal examen in een bepaald jaar. Vragen over regelgeving, te bestuderen leerstof e.d. kunnen worden gesteld via de contactmogelijkheid op *www.examenblad.nl* .
Leerlingen met vragen of klachten worden verwezen naar *www.laks.nl*

Er staat een (vermeende) fout in een examenvraag of in het antwoord
De centrale examens worden met grote zorgvuldigheid geconstrueerd en vastgesteld. Daarna wordt het centrale examen nog een aantal keer gecontroleerd door diverse deskundigen. Helaas komt het soms toch nog voor dat er een fout in het examen zit.
Wat moet er nu gebeuren wanneer een docent denkt dat hij/zij een fout heeft geconstateerd?
In dat geval moet de docent zo snel mogelijk contact opnemen met de examenlijn van het CvE. Als het CvE het met de docent eens is dat de examenopgave of het correctievoorschrift niet klopt, dan wordt een passende maatregel genomen. Die maatregel kan zijn dat het CvE een aanvulling op het correctievoorschrift publiceert of – indien een aanvulling niet mogelijk is – bij de normering rekening houdt met de fout of onvolkomenheid.



Wat niet mag is zelf het correctievoorschrift aanpassen! Ook als een docent een vermeende fout aan de examenlijn heeft gemeld, dient de betreffende vraag nagekeken te worden zoals in het correctievoorschrift is aangegeven.
De procedure staat ook in de 'Algemene regels van het correctievoorschrift', die voorafgaan aan de antwoorden. Lees die algemene regels vooral door, zeker wanneer u voor het eerst een examen nakijkt.

De corrector is het niet eens met het correctievoorschrift
Het correctievoorschrift valt onder wet- en regelgeving die van overheidswege wordt verstrekt, in dit geval door het CvE, en is derhalve een algemeen verbindend voorschrift. Daarom mag niet worden afgeweken van het correctievoorschrift ook al vindt de docent die het werk nakijkt zijn eigen verdeling van de scorepunten beter of geeft hij de voorkeur aan een andere oplossingsmethode.

Soms worden in het correctievoorschrift verschillende mogelijkheden genoemd om het antwoord te vinden maar heeft een leerling toch nog iets anders bedacht dat ook (helemaal of gedeeltelijk) juist is. In dat geval mag de docent punten toekennen die in verhouding staan tot de puntenverdeling in het correctievoorschrift. Het antwoord van de leerling moet dan wel aantoonbaar en op wiskundige gronden juist zijn. Een docent die zegt: "Ik heb mijn leerlingen geleerd dat ze het antwoord altijd moeten afronden op twee decimalen" mag niet van het correctievoorschrift afwijken als daar een andere afronding gegeven wordt, omdat zijn argument geen houdbaar wiskundig argument is.

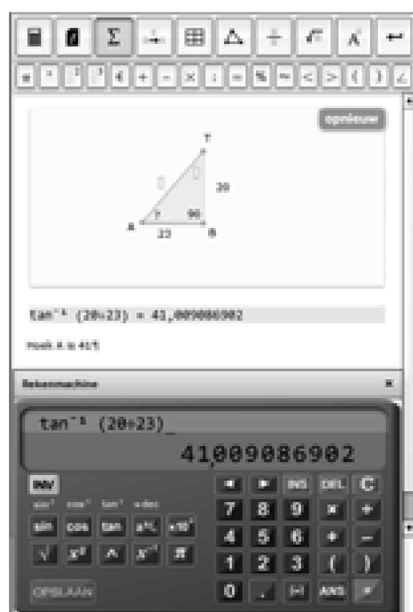
Soms bespreken docenten, bijvoorbeeld via het forum of de examenbesprekingen van de NVvW, hoe om te gaan met het correctievoorschrift. Dat kan bijvoorbeeld gaan over het corrigeren van een bepaalde fout die veel leerlingen maken of het beoordelen van een afwijkende oplossingsmethode. Deze bespreking is uiterst zinvol, maar eventuele afspraken die docenten maken hebben geen algemene geldigheid. Ze kunnen hoogstens dienen als hulp bij uw eigen beoordeling van het werk van uw leerlingen en dat van de leerlingen van wie u de tweede corrector bent.

Wat moeten de leerlingen weten over afronden?
In het vorige voorbeeld werd al genoemd dat er soms misverstanden zijn over het afronden van een antwoord.
Indien er in een opgave geen specifieke afronding wordt gevraagd en deze afronding ook niet door de context bepaald wordt, staat vanaf 2013 in het correctievoorschrift '(of nauwkeuriger)' achter het gegeven antwoord. Dit betekent dat zowel het antwoord dat in het correctievoorschrift gegeven wordt, als een nauwkeuriger antwoord, goed gerekend moet worden.
Dit geldt vanaf 2013 ook voor de grootte van een (berekende) hoek. Tot nu toe werd meestal van leerlingen verwacht dat zij de grootte van een hoek in hele graden opschreven. De overweging daarbij was dat de hoekgrootte anders genoteerd zou moeten worden in graden, (hoek)minuten en (hoek)seconden. In de praktijk blijkt het afronden in minuten en seconden op de achtergrond te zijn geraakt en worden ook hoeken soms afgerond in decimalen. Vandaar deze aanpassing.
Voor het afronden van een antwoord worden in het algemeen de betreffende wiskundige regels toegepast (5 of hoger, afronden naar boven, 4 of lager, afronden naar beneden). Antwoorden worden nooit 'afgekapt'. Bij het noteren van tussenstappen wordt in het correctievoorschrift met een aantal stippen aangegeven dat (nog) niet is afgerond, bijvoorbeeld
sin (halve hoek C) = 0,42… De halve hoek C is 25,37… (graden), hoek C is 51°.
Natuurlijk kan een leerling een ander aantal decimalen in zijn tussenantwoord genoteerd hebben.

Bij het afronden van een antwoord moet een kandidaat het volgende overwegen:
- Staat in de vraag hoe het antwoord moet worden gegeven? Bijvoorbeeld: "Geef je antwoord in hele miljoenen."
- Moet er rekening gehouden worden met de situatie? Bijvoorbeeld: "Hoeveel pakken kattenvoer moet Mariska minstens kopen?" In dit geval moet het berekende antwoord 3,4 naar boven worden afgerond tot 4 pakken.
- Is er een keuze wat betreft de eenheid die bij het antwoord hoort? Bijvoorbeeld: "Bereken de lengte van het stuk touw dat Simon gebruikt." Zowel het antwoord 3,4 meter als 342 cm kan in dit geval juist zijn. De betreffende eenheid mag dan uiteraard niet worden weggelaten.
- Is wat ik heb berekend een tussenantwoord of het eindantwoord? Bij het noteren van een berekening wordt niet tussentijds afgerond. Behalve wanneer het afgeronde antwoord van een vorige "Laat zien dat…" vraag gebruikt wordt bij het antwoord.

De toolbox wordt gebruikt in de digitale centrale wiskunde-examens KB en wordt na een pilotfase dit schooljaar (2013) ingevoerd. Het is een soort digitaal notitieblaadje waarop onder andere een schets kan worden gemaakt van een driehoek, een tabel kan worden gemaakt, of pijlentaal gebruikt. De tussenantwoorden van de rekenmachine kunnen per regel worden opgeslagen zodat de leerling kan laten zien hoe een antwoord is gevonden.
De toolbox is ook apart beschikbaar zodat leerlingen die een digitaal KB-examen zullen afleggen er van tevoren mee kunnen oefenen.

Een mogelijke vraag is ook waarom een bepaalde nauwkeurigheid in het gegeven antwoord in een bepaalde situatie onwenselijk is. Bijvoorbeeld: “Mehmet heeft de lengte van een metalen staaf (in meters) berekend. Hij noteert dit antwoord vanaf het scherm van zijn rekenmachine: 1,9375228 m. Leg uit waarom in dit geval een antwoord met 7 decimalen niet juist is.”



figuur 1

De leerling gebruikt ‘machinetaal’ in zijn antwoord

Docenten besteden veel lestijd aan het aanleren van correcte wiskundetaal in het antwoord. Maar iedereen komt af en toe leerlingen tegen die denken dat het antwoord nog korter kan of die ‘machinetaal’ gebruiken.
Een leerling schrijft bijvoorbeeld: hoek $A = \tan^{-1}(20/23) = 0{,}86 = 41°$ in plaats van de door de docent aangeleerde manier:

$$\tan(\text{hoek } A) = \frac{20}{23} = 0{,}86.....$$
$$\text{hoek } A = 41°$$

In dit geval kan de vakspecifieke regel worden toegepast dat, wanneer een notatiefout is gemaakt en als gezien kan worden dat de kandidaat juist gerekend heeft, geen scorepunt wordt afgetrokken. Bij het ‘opslaan’ van een antwoord in de toolbox van het digitale KB-examen zien we soms alleen ‘machinetaal’, zoals in het voorbeeld ***in figuur 1***. Ook in dat geval wordt de hierboven genoemde vakspecifieke regel gehanteerd.

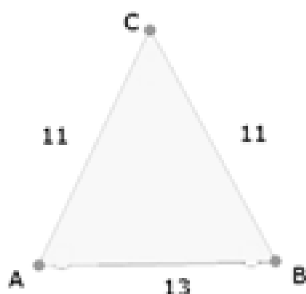
Samenvatting

We vatten de belangrijkste punten uit dit artikel samen.

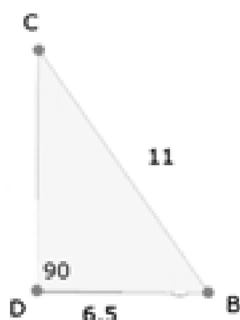
- De syllabus wiskunde (*www.examenblad.nl*) is leidend bij het construeren van centrale examens.
- De centrale examens zijn gelijk voor alle leerlingen die op een bepaald niveau het examen afleggen en de corrector moet zich daarom aan het correctievoorschrift houden.
- Afspraken die docenten onderling bijvoorbeeld maken over het corrigeren van bepaalde oplossingsmethodes die niet in het correctievoorschrift voorkomen zijn niet bindend.
- Mocht er naar de mening van een docent een fout voorkomen in het examen of het correctievoorschrift, dan moet zo spoedig mogelijk contact worden opgenomen met de examenlijn van het CvE: *examenlijn@cve.nl* .
- Ook bij het constateren van een (mogelijke) fout moet het correctievoorschrift gevolgd worden; het CvE neemt een passende maatregel.

Een voorbeeld

Opmerking. De schetsen van driehoeken die in dit voorbeeld gebruikt zijn, werden gemaakt via de toolbox die beschikbaar is bij de digitale KB-examens.
De vraag is om de hoogte (in centimeters) te berekenen van een driehoek *ABC* die binnen een situatie voorkomt. Er moet worden afgerond op één decimaal.



figuur 2



figuur 3

Een leerling kan in de toolbox deze schets maken om de gegevens in te vullen; ***zie figuur 2***.

Daarna is een nieuwe schets gemaakt van de rechthoekige driehoek *DBC*, zodat de hoogte *DC* kan worden berekend met de stelling van Pythagoras.
De schetsjes hoeven niet te worden beoordeeld; als een leerling dat liever doet, kan hij/zij ze ook op een kladblaadje maken.

Dit is wat de leerling heeft opgeschreven:
$CD = \sqrt{11^2 + 6{,}5^2}$
De hoogte van driehoek *ABC* is 12,8 cm

In het correctievoorschrift staat:

- Rekenen in een rechthoekige driehoek met rechthoekszijde 6,5 en langste zijde 11 (1)
- $CD = \sqrt{11^2 - 6{,}5^2} = 8{,}87.....(\text{cm})$ (1)
- De hoogte van driehoek *ABC* is 8,9 (cm) of 89 mm (1)

Hoeveel punten krijgt deze leerling nu?
In ieder geval de eerste scorepunt: er is in de goede rechthoekige driehoek gerekend. Stel je voor dat de leerling die plus onder het wortelteken wel had opgeschreven maar op de goede manier met een min had gerekend (en dus het juiste antwoord gevonden), dan mag er worden geredeneerd door de corrector dat er een verschrijving is geweest en kan deze leerling alle punten krijgen. Maar in ons voorbeeld is dat niet het geval, de tweede scorepunt mag zeker niet worden toegekend.
Of het derde scorepunt mag worden gegeven is hier discutabel. Veel docenten zullen dat punt niet toekennen want de leerling had zich moeten realiseren dat in een rechthoekige driehoek een rechthoekszijde niet langer kan zijn dan de langste of schuine zijde. Maar een docent kan ook argumenteren dat de uitkomst juist is wanneer met de – foute – uitkomst van het vorige punt is doorgerekend. In het correctievoorschrift had dus eigenlijk een opmerking moeten staan, zoals bijvoorbeeld:
Wanneer de gevonden hoogte door het verder rekenen met een eerdere fout groter is dan de lengte van de schuine zijde BC, voor dit antwoord geen scorepunt toekennen.
In het correctievoorschrift staat bij de laatste stip als antwoord 8,9 met cm tussen haakjes erachter want de centimeters kwamen al in de vraagstelling voor; dus die hoeven niet beslist bij het antwoord herhaald te worden. Een leerling mag ook als antwoord 89 mm geven maar dan moet de eenheid wel vermeld zijn. Die 89 mm is immers gelijkwaardig met 8,9 cm.

Over de auteur
Truus Dekker is voorzitter vaststellingscommissie centrale examens wiskunde vmbo CvE.
E-mailadres: *truusd@casema.nl*

Opkomst en ondergang van de rekentoets

[Jaap de Jonge]

De nieuwe rekentoets houdt de gemoederen in het voortgezet onderwijs flink bezig. Een recente enquête in de WiskundE-brief laat zien dat het draagvlak voor de rekentoets klein is. En in december besloot het kabinet om de rekentoets de komende twee jaar nog niet mee te tellen in de zak/slaagregeling.
In dit opiniestuk legt Jaap de Jonge, wiskundedocent aan het Gymnasium Felisenum in Velsen-Zuid, de invoering van de rekentoets naast het rapport van de commissie Dijsselbloem over de mislukte invoering van de basisvorming.

Nog even en de generale repetitie voor de rekentoets vindt plaats op tal van scholen in het voortgezet onderwijs. Hoewel, generale repetitie? Vlak voor de kerstvakantie werd duidelijk dat de spanning die bij zo'n repetitie hoort, er vanaf is gehaald: in 2014 komt het cijfer voor de rekentoets al wel op de examenlijst, maar de rekentoets gaat pas vanaf 2016 deel uitmaken van de zak/slaagregeling; in mbo-4 is er tot 2016 zelfs alleen maar sprake van pilots. Het is frappant hoezeer de invoering van de rekentoets parallellen vertoont met de invoering van de mislukte basisvorming, twintig jaar geleden. Het rapport van de commissie Dijsselbloem lijkt alweer vergeten. Dat is jammer en onbegrijpelijk, omdat het haarfijn laat zien hoe het gevaar van uitstel en zelfs mislukking besloten ligt in ondoordachte onderwijsvernieuwingen.

Het rapport van de commissie Dijsselbloem, *Tijd voor onderwijs*, verscheen in februari 2008, nog geen maand na het rapport *Over de drempels met taal en rekenen* van de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen onder leiding van Heim Meijerink, voormalig hoofdinspecteur van het voortgezet onderwijs. Dijsselbloem richtte zich op geheel of gedeeltelijk mislukte onderwijsvernieuwingen van de laatste decennia, Meijerink op de gestage daling van het reken- en taalniveau in diezelfde periode.

In *Over de drempels* formuleert Meijerink voor zowel rekenen als taal een aantal referentiekaders, die het gewenste niveau van taalbeheersing en rekenvaardigheid in verschillende fases van een schoolloopbaan aangeven. Hij doet drie hoofdaanbevelingen: het invoeren van de kaders, prioriteit geven aan basiskennis en basisvaardigheden, en investeren in tijd, scholing en middelen om niveauverhoging te bereiken. Hij gaat niet in op de vraag of leerlingen en studenten misschien andere dingen beter kunnen dan vroeger, maar zegt: wil je dat ze weer beter worden in rekenen en taal, dan heb je hier wat aandachtspunten.

Na het verschijnen van het rapport-Meijerink treffen taalspecialisten passende maatregelen: zowel in het vmbo als op havo en vwo wordt het vak Nederlands geijkt aan de referentiekaders – met andere woorden, het vak gaat (weer) wat meer aandacht besteden aan bepaalde vaardigheden die de afgelopen jaren kennelijk wat in de verdrukking waren gekomen. Geen haan die ernaar kraait, geen kind dat er iets van zal merken, geen school die ermee op kosten wordt gejaagd. Of de Nederlandse universiteiten – alle in de top 400 van de wereld – daarmee nog beter worden, of de Nederlandse economie daarmee een nog sterkere positie in Europa krijgt, of iemand er gelukkiger van wordt, dat weet natuurlijk niemand, maar het zal vast geen kwaad kunnen.

Met rekenen gebeurt er iets vreemds. De verantwoordelijke staatssecretaris, toen Van Bijsterveldt, vindt dat er een aparte rekentoets moet komen. Ze stelt dat het volgens deskundigen niet 'zomaar' mogelijk zou zijn om rekenopgaven volgens de referentiekaders te verwerken in de wiskunde-examens. Ze neemt geen halve maatregelen: de rekentoets krijgt een zelfstandige en prominente plaats, en wordt al voor het eindexamen afgenomen. Wie er minder dan een 5 voor haalt, kan niet meer slagen voor het eindexamen. Sterker, over drie jaar mogen eindexamenkandidaten slechts één 5 halen voor rekenen en de 'kernvakken' Nederlands, Engels en wiskunde.

De gang van zaken rond de rekentoets had zó het rapport-Dijsselbloem in gekund. Daarin worden drie onderwijsvernieuwingen tegen het licht gehouden, waaronder de basisvorming. In *Tijd voor onderwijs* staat het droogjes: 'Met de invoering van de basisvorming werd een algehele verhoging van het onderwijspeil beoogd.' Dat betekende onder meer dat alle leerlingen per vak dezelfde toets kregen, met vragen die tot hilariteit bij vwo-leerlingen leidden omdat ze veel te gemakkelijk waren en tot frustratie bij vmbo-leerlingen en -docenten omdat ze veel te moeilijk waren.
De basisvormingstoets was bij wet voorgeschreven en na een paar jaar weer verdwenen. Dat was geen verrassing, begrijpen we van Dijsselbloem: 'In het onderwijsveld zelf ziet men geen enkele toegevoegde waarde van de toets.' Staatssecretaris Netelenbos was niet onder de indruk: de toets moest blijven, in het belang van de kwaliteitsbewaking van het onderwijs. Pas haar opvolgster, Karin Adelmund, begreep dat het geen zin heeft iets te verdedigen dat louter op papier bestaat. Voormalig minister Van Bijsterveldt leek haar inspiratie vooral aan Netelenbos te ontlenen. In het OCW-document *Achterstandbestrijding en referentieniveaus voor taal en rekenen in het vo*, van april 2012, staat de examenregeling vanaf het schooljaar 2015-2016 beschreven. In een sportief NB lezen we: 'Verschillende schoolorganisaties in het vo hebben al aangegeven dat zij deze regeling in elk geval voor de leerlingen in de basisgerichte leerweg weinig realistisch achten. Maar de minister wil aan haar ambitie voor taal en rekenen vasthouden.'

Er was, zeker ten tijde van de basisvorming en de tweede fase, sprake van een kleine en relatief gesloten beleidskring, zo schrijft Dijsselbloem; 'kritische onderzoeken werden

nogal eens genegeerd.' De Landelijke Pedagogische Centra, met name het KPC en het APS, zo lezen we verder, toonden zich in hun aanbod richting scholen als krachtige voortrekkers van verdere didactische vernieuwingen in de richting van het nieuwe leren. Dijsselbloem constateert tunnelvisie en noemt het 'opvallend' dat voor de vastgestelde problemen geen alternatieven werden ontwikkeld en afgewogen.

In het laatste hoofdstuk van *Tijd voor onderwijs* formuleert Dijsselbloem twaalf 'voorwaarden voor een zorgvuldig beleidsproces'. Laat ik er drie noemen.
Ten eerste: 'Aan de voorwaarden voor een goede implementatie, waaronder geld en expertise en tijd is voldaan.' Dat is niet gebeurd, zoals de argumentatie voor uitstel van de zak/slaagregeling laat zien. 'Leerlingen waren nog onvoldoende voorbereid, examencondities nog niet optimaal en het digitale afnamesysteem en de testprocedures behoeven nog verbetering', lezen we in de *Vierde voortgangsrapportage implementatie referentieniveaus taal en rekenen* van het Steunpunt Taal en Rekenen VO van december 2012.
Ten tweede: 'Er is voldoende draagvlak onder alle betrokkenen maar in ieder geval onder de professionals die de vernieuwing in de praktijk moeten brengen.' Een enquête van de *WiskundE-brief*, in december 2012, laat zien dat daarvan geen sprake is: 55% van de respondenten vindt een aparte rekentoets zelfs overbodig. Op de website van de VO-raad lezen we: 'Het is goed om ambities voor betere prestaties in taal en rekenen na te streven, maar leerlingen moeten hier niet op worden afgerekend.'
Ten derde: 'Er is een evaluatie beschikbaar van voorafgaand beleid.' Die is interessant, omdat eerder in *Tijd voor onderwijs* staat te lezen: 'Er is geen adequate nationale peiling van de ontwikkeling van het onderwijsniveau in het voortgezet onderwijs. De bestaande peilingen bieden een fragmentarisch beeld.'

De druk is nu even van de ketel: vóór 2016 zullen er geen leerlingen zakken vanwege de rekentoets. De argumenten voor uitstel dringen de vraag op: waarom werd hij zo snel ingevoerd? Dijsselbloem schrijft: 'Grote politieke tijdsdruk was belangrijker dan voldoende tijd voor de instellingen om de veranderingen goed voor te bereiden en in te voeren.' Ook Meijerink wil tijd: voor nader onderzoek naar wat en hoe er in de praktijk van het primair onderwijs wordt onderwezen. Hij stelt dat het wenselijk is 'om ook voor het voortgezet onderwijs een langlopend peilingsonderzoek op te zetten om betrouwbare informatie te verkrijgen over de opbrengst voor de basisvaardigheden taal en rekenen.'

Er is een enorme bedrijvigheid in het Nederlandse onderwijs rond een probleem waarvan aard en ernst volstrekt onduidelijk zijn. Het lijkt niet best, al die gezakten voor de pilottoets in 2012. Maar zou het twintig jaar geleden beter zijn geweest? En hoe komt het dat zoveel leerlingen ervoor zakken? Misschien door wat we in Meijerink lezen, namelijk 'In de onderbouw havo-vwo wordt niet meer systematisch gewerkt aan het onderhouden en uitbreiden van de verworven kennis en vaardigheden op het gebied van het rekenen.' Maar waarom dat dan in de examenklas toetsen? Elders in het rapport lezen we: 'Leerlingen met wiskunde B havo of een afgeronde vwo-opleiding halen zonder meer de kwaliteit 3S. Voor hen is geen apart vierde referentieniveau geformuleerd.' Vier jaar later haalt 72% van de havisten en 32 % van de vwo-ers een onvoldoende voor de 3F-toets. De wenselijkheid van een langlopend peilingsonderzoek is niet zomaar een wilde gedachte van Meijerink.

De rekentoets zo'n grote rol laten spelen bij het eindexamen is een perverse erkenning van het feit dat niemand weet wat het betekent dat eindexamenkandidaten moeite hebben met eerste- en tweedeklassommetjes. Met het mes op de keel worden scholen en eindexamenkandidaten gedwongen tekortschietend onderwijs uit een eerdere fase van de schoolloopbaan goed te maken, ten koste van tijd voor wiskunde én andere vakken. Niemand wil voor zijn eindexamen zakken door de rekentoets; geen school die dat zou kunnen verantwoorden. De wetgever kan ondertussen blijven doen of zijn neus bloedt. In een serieus onderzoek zou de rekentoets eerst in de onderbouw worden afgenomen, wanneer alle vaardigheden voor de rekentoets al behandeld en geoefend zijn. Zou die daar slechter worden gemaakt? Niemand die dat nu weet. Het zou ouders, leerlingen, leraren, scholen én de overheid iets geven om over na te denken, zonder er het eindexamen mee in de weg te zitten. Ook de 'deskundigen' – wie dat ook mogen zijn – die menen dat het niet 'zomaar' mogelijk is het examenprogramma aan de referentieniveaus voor wiskunde te ijken, zouden daar wat van kunnen leren …

Over de auteur

Jaap de Jonge studeerde filosofie en wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam.
Sinds 1993 is hij wiskundeleraar op het Gymnasium Felisenum in Velsen-Zuid. Daarnaast geeft hij sinds 2007 *calculus* aan de UvA. Vorige maand besefte hij tot zijn spijt dat hij over nog eens twintig jaar 66 is en dan al bijna moet stoppen met werken.
E-mailadres: *dejonge@felisenum.nl*

Wiskunde en autisme

DEEL 4 – DOORLOPENDE LEERLIJNEN

[Bram Arens en Danny Beckers]

Leerlingen met ASS [1] vinden steeds vaker hun weg naar het reguliere onderwijs. Aan veel van deze leerlingen merk je op het eerste gezicht weinig. Dat neemt niet weg dat ze tegen problemen aanlopen, zowel thuis als op school. Als docent wiskunde ziet u de leerling vaker, kunt u beter beoordelen wat zijn of haar prestaties waard zijn en heeft u meer mogelijkheden om de leerling te sturen dan een begeleider op afstand. Het vak wiskunde is vanwege de ondubbelzinnige vragen en antwoorden bij uitstek geschikt om het leerproces van een ASS-leerling te beïnvloeden. In deze serie geven Bram Arens en Danny Beckers een aantal handvatten om effectief vorm te geven aan passend onderwijs voor deze doelgroep.

Verbanden op een ander niveau

In de vorige aflevering in deze serie [2] hebben we een aantal manieren behandeld waarop u als docent een leerling met autisme kan helpen om op microniveau verbanden te gaan leggen.
Hierin kwamen de basale verbanden tussen equivalente beweringen aan de orde, het koppelen van procedures en het stimuleren van de integratie van informatie die in een hoofdstuk wordt aangeboden. Dit is een mooie eerste stap binnen de wiskundeles, die zich wel beperkt tot de verbanden binnen de stof waar u op dat moment mee bezig bent.
We willen nog een stap verder en de verbanden trekken op een breder vlak, die u nog binnen de wiskundeles kunt aanpakken. Voor de leerling met autisme zal het nodig zijn om de gehele stof te gaan overzien, en dus ook dat hij verbanden gaat leggen tussen hoofdstukken. We zullen een aantal eenvoudig toepasbare aanwijzingen geven die u kunnen helpen om uw ASS-leerling systematisch te laten wennen aan het gaan zien of zoeken van verbanden in een groter geheel. In dit stuk willen we u eerst laten zien hoe u het bredere probleem kunt herkennen, en vervolgens een aantal strategieën aan de hand doen waarop u met de leerling hieraan kunt werken. Het uiteindelijke doel is dat de leerling zich bewust wordt van verbanden, hier zelf actief in gaat worden, en daarmee ook beter overzicht krijgt over de gehele stof.

Toetsanalyse

Tijdens een toets kunt u bij de leerling met autisme zien wat daarvan terecht is gekomen. Als u de standaardtoetsen gebruikt die bij veel methoden worden aangeboden, dan zal het u zijn opgevallen dat alle onderdelen uit een hoofdstuk ongeveer evenveel aan bod komen.
Wanneer uw leerling met autisme uitgerekend de laatste onderdelen – waarin de toepassing van het geleerde, of het meest geavanceerde onderdeel uit de paragraaf wordt getoetst – slecht maakt, maar toch een voldoende scoort, dan moet u opletten. Voor de leerling is dit een vreemd signaal: hij scoort een voldoende, maar als hij eigenlijk de essentie van het hoofdstuk niet begrepen heeft, dreigt er toch een probleem te ontstaan. Terwijl de betreffende leerling denkt dat hij het onderwerp 'voldoende kent', kan dat betekenen dat hij juist op een cruciaal onderdeel weinig heeft meegekregen – of dat hij de informatie uit vorige hoofdstukken onvoldoende kan inzetten.

Bij de hoofdstukken over vergelijkingen, rekenen met procenten en meetkunde, betekent dit dat uw leerling weliswaar de losse stukjes theorie beheerst, maar ze helemaal niet met elkaar in verband brengt. U voorkomt dit eenvoudig door de leerling juist op deze laatste paragraaf extra te toetsen. Toetsanalyse loont dus de moeite. Hierbij willen we wel even opmerken dat er bij deze toepassingsvragen soms ook andere problemen aan ten grondslag kunnen liggen, zoals een gebrekkige algemene ontwikkeling. Als u bijvoorbeeld een leerling een opgave voorlegt over een spel kaarten en de leerling heeft nog nooit kaart gespeeld, dan zal hij in eerste instantie moeten wennen aan het idee, en is het beschrijven van een dek kaarten onvoldoende om de leerling vertrouwd te laten zijn met het idee. Door de onbekendheid met het fenomeen trekt de leerling zich ook snel terug in zijn eigen gedachtegangen.

Een ander leuk voorbeeld uit onze praktijk om te illustreren hoe bepaalde 'onschuldig' ogende opgaven toch ineens als moeilijk ervaren kunnen worden kunt u vinden ***in kadertekst 1.***

Verschillende hoofdstukken koppelen

Als het bij de toetsen over één hoofdstuk goed gaat, is het zaak om uw leerling een stapje verder te helpen. Uiteindelijk wilt u dat hij in staat is om de dingen die hij de afgelopen jaren heeft geleerd te integreren. Dat gaat bij veel leerlingen vanzelf, omdat ze voor zichzelf een kapstok creëren en alle informatie met elkaar in verband brengen. Voor de leerling met autisme die moeite heeft met het leggen van verbanden, is dit echter geen automatisme.
In twee gevallen uit onze praktijk hebben we leerlingen meegemaakt die geen beeld hadden ontwikkeld bij vermenigvuldigen, en die opgaven waarin moest worden vermenigvuldigd steevast oplosten door óf blind op de rekenmachine te vertrouwen, óf door een herhaalde optelling uit te voeren. Met zorgvuldig uitgewerkte stappenplannen waren deze leerlingen nog wel tot de onderbouw havo en vwo gekomen, maar ze liepen vervolgens vast op de machtsverheffing. Het is dus essentieel dat uw leerling met autisme leert die kapstok zelf te maken en dat u niet te lang doorgaat met stappenplannen maken voor uw leerlingen.
U kunt dat stimuleren door leerlingen af en toe te attenderen op verbanden tussen hoofdstukken, of door hen te confronteren met opdrachten die het hoofdstuk overstijgen. En door af en toe een andere werkwijze te kiezen: door starheid van uw leerlingen kan het even duren alvorens ze doorhebben waar u heen wilt, maar zijn ze gedwongen hun vaste patronen los te laten

en wordt hun beheersing van de stof dus beter. Dat is dus zeker de moeite waard. Begin eenvoudig, door bijvoorbeeld bij een opdracht over de stelling van Pythagoras niet te vragen naar de andere rechthoekzijde, maar naar de oppervlakte van de driehoek. De leerling kent de beide zaken los van elkaar (of niet!). Doel is de voorkennis over de oppervlakte van een driehoek in de herinnering te roepen, zodat de leerling zich realiseert dat het bij een hoofdstuk over driehoeken niet alleen gaat om de nieuwe dingen die hij hier tegenkomt, maar ook dat hij geacht wordt de zaken die hij al gehad heeft, nog steeds te kennen c.q. zich te herinneren.

Opdrachten van deze vorm zijn er natuurlijk in alle soorten en maten te bedenken. In de ***kaderteksten 2 tot en met 4*** geven we een aantal mogelijkheden die de leerlingen verbanden tussen hoofdstukken laat leggen. Het zal voor leerlingen ook een goede oefening zijn om het soort opgaven, waarin de informatie van verschillende hoofdstukken in terugkomen, zelf te bedenken. Zo wordt de leerling gedwongen om te zoeken naar de verbanden.
Op deze manier construeert de leerling kunstmatig zijn eigen kapstok, maar belangrijker dan dat: hij wordt geconfronteerd met het gegeven dat een kapstok nuttig kan zijn, en dat maakt het voor de leerling ook mogelijk om die mentale kapstokken in andere situaties te gaan inzetten. Indien van toepassing kunt u leerlingen die moeite hebben om deze kapstokken te genereren natuurlijk altijd terug verwijzen naar een paar tactische opgaven uit relevante eerdere hoofdstukken.

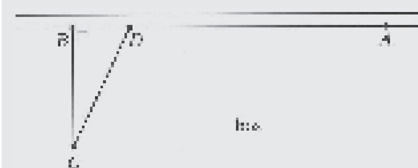
Verschillende vakken koppelen

De meeste leerlingen zullen in de wiskundeles uiteindelijk de verbanden tussen de verschillende hoofdstukken wel gaan zien. Wanneer het op uw school gebruikelijk is om ook sectieoverstijgend te werken, kunt u uw leerlingen met autisme een nog groter plezier doen. Zoals we in voorgaand deel aangaven, is de transfer van aangeleerde vaardigheden naar andere vakken – of uiteindelijk naar de thuissituatie – bij leerlingen met autisme niet vanzelfsprekend. Wanneer u deze verbanden expliciet maakt en dit ook met enige regelmaat herhaalt, zal het de leerling helpen om die transfer wel te maken.
Waaraan u in eerste instantie kunt denken is het rekenwerk in de wiskundeles. Voor de leerling met autisme is het – evenals voor veel andere leerlingen, overigens – helemaal niet vanzelfsprekend dat dit rekenwerk in de wiskundeles en het rekenwerk in de andere lessen aan elkaar gerelateerd zijn. Zowel binnen de natuurkunde, scheikunde als economielessen komt echter het nodige rekenwerk voor. Een mooi voorbeeld zijn de vergelijkingen bij natuurkunde die ontstaan door het gebruik van de formules. In de meest eenvoudige gevallen lukt het de leerling nog wel om eruit te komen, maar als de vergelijkingen ingewikkelder worden, zal de leerling niet automatisch grijpen naar de wiskundige vaardigheden om de vergelijking op te lossen. Wanneer u af en toe de kans aangrijpt om in plaats van een vergelijking uit het boek, een formule van natuurkunde te nemen, bijvoorbeeld de lenzenformule, wanneer u bezig bent met het oplossen van 'breukvergelijkingen', dan laat u daarmee zien dat wiskunde niet een op zichzelf staand vak is. Waar u ook aan kunt denken is: het rekenen met procenten, kruiselasticiteiten en evenwichtspunten bij economie [3], of het rekenen met verhoudingen in de scheikundeles.
Het kan de leerling ook helpen door juist de verschillen tussen de vakken te accentueren. Wanneer de leerling maar gaat inzien dat hij wezenlijk met dezelfde zaken bezig is. Zo zien veel leerlingen niet dat ze vergelijkingen oplossen bij natuurkunde. Voor leerlingen met ASS is het feit dat ze bij wiskunde veelal een *x* oplossen, en dat bij natuurkunde de letters (meestal géén *x*) een fysieke grootheid representeren, voldoende om verschillende strategieën te gaan hanteren en geen verband te zien.
Door het benadrukken van de overeenkomsten en de verschillen tussen vakken, leert de leerling met autisme meer samenhang te zien in het geheel en zal hij eerder teruggrijpen naar aangeleerde vaardigheden bij andere vakken. Hoe meer deze leerlingen verbanden gaan inzien, des te meer gaan ze ook nieuwe verbanden zelf zoeken en aanbrengen in nieuwe situaties. Hiervan zal de leerling ook in de rest van zijn (school)carrière profijt ondervinden.

Wees u er wel van bewust dat het een lang proces is en dat het een kwestie is van vaak herhalen en inslijten. Maar wanneer u af en toe vakoverstijgend werkt, kan er wel een goed begin gemaakt worden.

Kadertekst 1

(Ontleend aan het Eindexamen havo 1992)
Een bospad loop langs een bosperceel. *A* en *B* liggen op het pad en *C* ligt in het bos. Van *A* naar *B* is 192 m en van *B* naar *C* is 80 m.



Men wil een waterleiding aanleggen van *A* naar een huis bij *C*. Dit kan rechtstreeks door het bos of gedeeltelijk langs het pad tot punt *D* en verder door het bos. Langs het pad kost de aanleg van de waterleiding € 60,- per meter en door het bos € 100,- per meter.
a. Bereken de aanlegkosten in het geval dat *BD* 18 meter is.
De kosten van de waterleiding via *D* worden gegeven door de formule:
$K(x) = 11520 - 60x + 100\sqrt{6400 + x^2}$
waarin *x* de lengte van *BD* is.
b. Toon aan dat deze formule juist is.
c. Toon aan dat er een waarde van *x* is waarvoor de kosten minimaal zijn.
d. Bereken de minimale kosten.

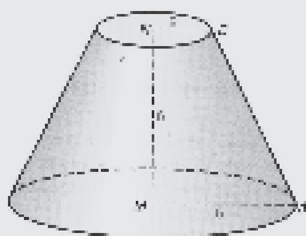
In deze opgave over differentiëren, waarin de leerling moest uitrekenen op welk punt een waterleiding het beste (lees: zo goedkoop mogelijk qua aanlegkosten) kon worden afgetakt, raakten sommige leerlingen met autisme in verwarring. Zij meenden dat als je toch ging graven dat je dan maar beter langs de weg kon blijven, want daar kon je tenminste gewoon een graafmachine inzetten. Zodoende kwamen ze aan het rekenwerk helemaal niet toe.

Kadertekst 2

Een balk *ABCD.EFGH* met afmetingen 3, 4 en 6 wordt door een diagonaalvlak *ABGH* in twee gelijke delen verdeeld. Het snijpunt van de diagonalen *AG* en *HB* in dat vlak noemen we *M*. Bereken de oppervlakte van driehoek *CMG*.

Bij ruimtelijke opgaven kan een probleem met ruimtelijk inzicht mee gaan spelen, maar als de leerling een goed ruimtelijk inzicht heeft, dan is in een hoofdstuk over goniometrie bijvoorbeeld deze opgave leuk om uit te proberen.

Kadertekst 3



Wanneer de leerling in een hoofdstuk over oppervlaktes en inhouden nogmaals geconfronteerd wordt met gelijkvormige driehoeken dan is dat vaak al lastig genoeg. Desalniettemin is het een prima oefening om de relatie tussen die verschillende vergrotingsfactoren en de factor in een driehoek nogmaals te benadrukken. Dit kan met een opgave zoals het uitrekenen van de inhoud van een afgeknotte kegel hierboven, maar er zijn ook tal van mogelijkheden om dit tijdens de behandeling van de theorie aan bod te laten komen.

Kadertekst 4

In een hoofdstuk over het rekenen met procenten is het altijd goed om de vraag ook eens om te draaien. Dit geeft bijvoorbeeld aanleiding tot een lineaire vergelijking. Uiteraard kan de leerling ook door middel van een redenatie tot een antwoord komen, maar als u hem nogmaals met een vergelijking laat werken dan wordt de leerling nogmaals geconfronteerd met het verband tussen vergelijkingen en het rekenwerk aan procenten.

Noten en literatuur

[1] [Red.] Zie de website van Programmagroep Brein en Cognitie (van de Universiteit van Amsterdam): *www.adhd-autisme.nl/watisass.htm*

[2] Deel 3 van deze artikelenreeks verscheen in *Euclides* 88(4), pp. 177-178.
Deel 1 verscheen in *Euclides* 88(2), pp. 76-77; deel 2 verscheen in *Euclides* 88(3), pp. 120-122.

[3] Lenie Kneppers (2010): *Rekenen bij Economie*. In: *Nieuwe Wiskrant* 30(2), (december 2010); pp. 8-11.
Dit artikel is digitaal beschikbaar op: *www.fisme.science.uu.nl/wiskrant/artikelen/302/302december_kneppers.pdf*

Over de auteurs

Bram Arens en Danny Beckers waren werkzaam als wiskundedocent. Beiden zijn sinds een aantal jaren werkzaam bij Bureau Beckers te Nijmegen, hét expertisecentrum voor coaching van leerlingen en studenten met ASS of ADHD, en met een cognitieniveau vanaf havo.
E-mailadressen:
b.arens@bureau-beckers.nl
d.beckers@bureau-beckers.nl

Rekenen in het vmbo

UPS EN DOWNS BIJ DE INVOERING VAN HET REFERENTIEKADER

[Kees Buijs en Victor Schmidt]

Inleiding
Sinds enkele jaren wordt rekenen als 'nieuw' vakgebied in het vmbo ingevoerd. Dat blijkt niet vanzelf te gaan. Er doen zich allerlei omstandigheden en problemen voor die het voor veel scholen lang niet eenvoudig maken om dit vakgebied op een adequate manier in het leerplan op te nemen.
Vanuit het SLO-project *Verder met Rekenen* (*VmR*), dat zich richt op het ontwikkelen van doorgaande leerlijnen richting het beoogde eindniveau 2F voor leerlingen met rekenachterstand, wordt geprobeerd alle ontwikkelingen zo goed mogelijk te volgen. Met dat doel zijn er de afgelopen jaren ook twee conferenties 'Onderweg naar 2F' georganiseerd waarop rekendocenten verslag hebben gedaan van de stand van zaken op de eigen school, alsmede van de problemen waar men tegenaan is gelopen. Tevens hebben er in het kader van het *VmR*-project pilots op een vijftal scholen plaatsgevonden waarbij groepjes leerlingen uit vmbo-1, -2 en -3 werden geïnterviewd over hun rekenkennis en waarbij onderzocht is hoe deze leerlingen het beste ondersteund kunnen worden.
Hieronder pogen we de voornaamste door ons gesignaleerde ontwikkelingen op een rij te zetten.

De invoering van het Referentiekader Doorlopende Leerlijnen
Sinds 2010 geldt het *Referentiekader Doorlopende Leerlijnen* (SLO; 2008) als wettelijk kader voor de te bereiken niveaus van rekenvaardigheid die leerlingen zich op bepaalde momenten in hun schoolloopbaan eigen gemaakt moeten hebben. Over de haalbaarheid van deze referentieniveaus is van meet af aan veel discussie geweest. Op de beide genoemde conferenties 'Onderweg naar 2F' zijn duidelijke signalen naar voren gebracht dat niveau 2F, het algemene burgerschapsniveau, met name voor leerlingen in de BB-richting van het vmbo (basisberoepsgerichte leerweg), moeilijk haalbaar is. Ook vanuit de bestuursraden en andere betrokken instanties zijn dergelijke geluiden geventileerd.
De eerste toetspilot die in maart 2012 onder auspiciën van het Cito werd gehouden om de scholen met de nieuwe eindtoets kennis te laten maken, bevestigde deze zorg.
In een brief over deze toetspilot in juni 2012 meldt de minister dat de resultaten voor de leerlingen in de BB-richting van het vmbo met een gemiddeld cijfer van 4,3 en een percentage onvoldoendes van 84 nogal tegenvallen (zie de tabel ***in figuur 1***, afkomstig uit deze brief).

Pilot rekentoets VO – maart 2012			
	2F vmbo-bb	2F vmbo-kb	2F vmbo-tl
Gemiddelde cijfer	4,3	5,4	6,4
% onvoldoendes	84%	50%	28%

figuur 1 Overzicht van de toetsresultaten bij de toetspilot

Problemen waar de scholen zoal tegenaan lopen
Al met al lijkt sprake te zijn van een flink aantal omstandigheden en problemen die adequate invoering van rekenen als vakgebied in het vmbo bemoeilijken. In de eerste plaats moet er in het lesrooster natuurlijk ruimte voor de benodigde rekenlessen gecreëerd worden. Veel scholen lijken te kiezen voor een opzet waarbij in klas 1 en 2 alle leerlingen 1 à 2 uur per week rekenen krijgen, terwijl in klas 3 en 4 voor sommige groepen leerlingen rekenuren aangeboden worden. Uiteraard vinden bij andere vakgebieden soms ook rekenactiviteiten plaats, en soms worden gezamenlijke afspraken gemaakt over de wijze waarop het rekenen aan de orde komt. Het blijkt echter lang niet altijd eenvoudig om in dat opzicht op één lijn te komen.

In de tweede plaats dienen scholen vast te stellen welke lesmaterialen in de rekenlessen gebruikt zullen worden. Dit blijkt veelal evenmin een eenvoudige kwestie. Weliswaar is er de laatste jaren een veelheid aan (digitale en 'papieren') rekenboeken op de markt gekomen, maar vooral voor de groep BB-leerlingen bieden deze boeken niet altijd voldoende soelaas omdat ze grotendeels gericht zijn op zelfstandig oefenen terwijl veel leerlingen in de eerste plaats behoefte hebben aan op hun kennisniveau toegesneden instructie door de docent. Bovendien strookt de inhoud van deze rekenboeken niet altijd even goed met het referentieniveau 2F en de inhoud van de 2F-toets, met name als het gaat om het aandeel kale opgaven en het gebruik van de rekenmachine.

Een derde probleem dat zich regelmatig voordoet betreft het gebrek aan vakinhoudelijke *know how* bij docenten. De rekenlessen kunnen namelijk in principe door docenten met een uiteenlopende achtergrond (economie, wiskunde, maatschappijleer, …) gegeven worden die zeker in het begin lang niet altijd een goede vakinhoudelijke kennis van het rekenen hebben. Belangrijk is dan dat er gelegenheid tot professionalisering is via het volgen van cursussen of via ondersteuning door een rekencoördinator binnen het eigen team. Op sommige scholen heeft men inmiddels externe know how in huis gehaald in de vorm van leraren met een basisschoolachtergrond. Ook zijn er scholen waar regionale samenwerking met toeleverende basisscholen op poten wordt gezet, met bijeenkomsten gericht op

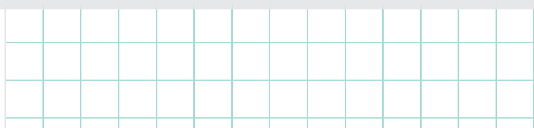


Hoeveel euro is de fiets goedkoper geworden?

euro



figuur 2 Voorbeeld van een opgave uit de voorbeeldtoets 2F



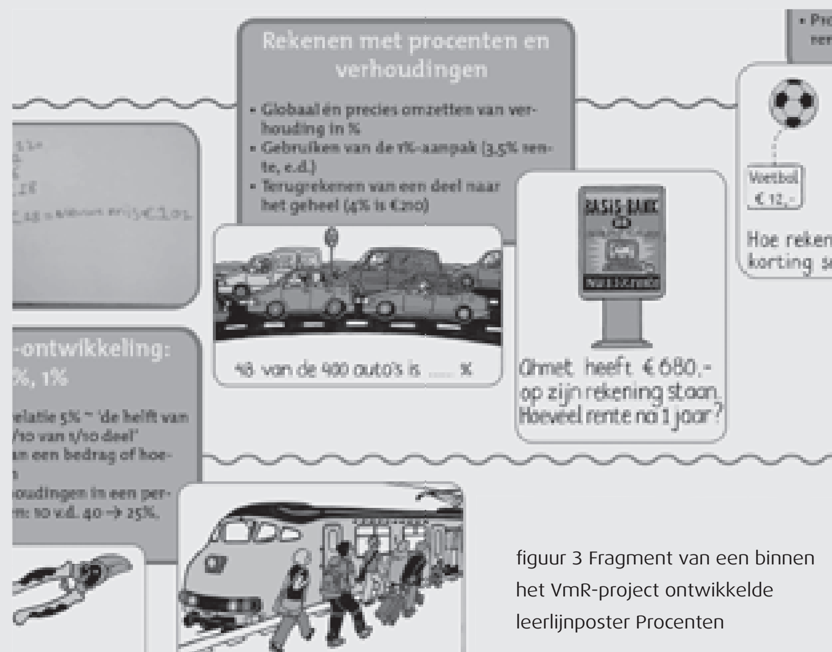
onderlinge uitwisseling van ervaringen en praktijkgegevens. Het blijkt echter lang niet altijd eenvoudig om dergelijke initiatieven van de grond te krijgen.

Recente koerswijziging: voortgangsrapportage staatssecretaris

Op 19 december 2012 verscheen de lang verwachte *Vierde Tussenrapportage* aan de Tweede Kamer over de invoering van het Referentiekader Taal en Rekenen. Er worden twee maatregelen aangekondigd die voor vmbo-scholen de druk van de ketel moet halen. De eerste daarvan betreft het feit dat deze toets met ingang van het schooljaar 2013-14 wel wordt ingevoerd, maar pas vanaf 2015-16 meetelt in de slaag/zakregeling. Wel zal het bij de toets behaalde cijfer op de eindlijst vermeld worden. Verder wordt aangekondigd dat er voor de verschillende leerwegen van het vmbo verschillende exameneisen met betrekking tot de rekentoets zullen worden ontwikkeld. Voor de leerlingen in de BB-richting zal een lagere norm gehanteerd worden dan voor de leerlingen in de KB- en TL-leerwegen.
Bij veel betrokkenen, leerlingen zowel als leraren, rekencoördinatoren en beleidsmakers lijkt een gevoel van opluchting te overheersen dat de scherpe kantjes van de invoering van het Referentiekader enigszins afgeslepen zijn. Natuurlijk blijft er wel enige druk op de ketel (niemand zal op z'n eindlijst voor het vak rekenen graag een zware onvoldoende vermeld willen zien), maar er ontstaat duidelijk meer ruimte voor de scholen om het rekenonderwijs beter op orde te krijgen.

Aandachtspunten bij de verdere invoering van rekenen

De vraag rijst dan op welke manier de scholen deze extra ruimte kunnen benutten. In het *VmR*-project is een aantal ideeën ontwikkeld die tot besluit van dit artikel hieronder beknopt worden weergegeven. Ze zijn onder meer gebaseerd op de uitkomsten van de discussies hierover op de genoemde conferenties 'Onderweg naar 2F'.
In de eerste plaats lijkt het voor scholen aan te bevelen om flexibel met de gebruikte lesmaterialen om te gaan. Lang niet alle in de rekenboeken behandelde lesstof is immers van belang voor het 2F-niveau en de 2F-toets. Het lijkt de moeite waard om grondig kennis te nemen van de inhoud van deze toets (te vinden op: *www.steunpunt-taalenrekenenvo.nl*) en het onderwijs mede af te stemmen op de typen opgaven die daarin frequent aan de orde komen. Daarbij lijkt het aan te bevelen ruimte voor regelmatige instructie in de lessen in te bouwen, met aandacht voor het leren toepassen van rekenkennis en voor het verstandig leren inzetten van de rekenmachine.
In samenhang daarmee lijkt het aan te bevelen om in de lessen regelmatig korte oefenmomenten te wijden aan elementair hoofdrekenen, getalbegrip en schattend rekenen. Zulke momenten kunnen ervoor zorgen dat de vaak gebrekkige basiskennis bij veel leerlingen geleidelijk aan op een hoger niveau komt, dat ze meer inzicht in getallen en getalrelaties krijgen, en meer greep op elementaire hoofdrekenstrategieën en rekenregels zoals de *tienregel*.
In de derde plaats lijkt het aan te bevelen om de nodige studie te maken van doorlopende leerlijnen, in het bijzonder met betrekking tot domeinen zoals procenten, meten en kommagetallen – domeinen die voor het 2F-niveau van grote betekenis zijn en die veelal in een lang lopend leerproces aan de orde komen. Uiteraard kan het niet de bedoeling zijn om dit leerproces in z'n geheel opnieuw te laten doorlopen. Maar voor sommige leerlingen zijn zulke onderwerpen betrekkelijk nieuw omdat ze er in het basisonderwijs niet goed aan zijn toegekomen. Daarom kan het voor rekendocenten nuttig zijn om inzicht te hebben in de leerlijnen waarlangs het leerproces zich bij deze domeinen beweegt. Informatie hierover is onder meer te vinden op de website *www.rekenlijn.nl*, alsmede in eerdere SLO-publicaties zoals de lesmap *Verder met Rekenen* (Buijs & Van der Zwaart; 2011). In het huidige *VmR*-project worden visueel-schematische voorstellingen van deze leerlijnen ontwikkeld, in eerste instantie in de vorm van posters waarop de opbouw van deze leerlijnen met voorbeeldopgaven wordt verduidelijkt (***zie figuur 3***). In tweede instantie is het de bedoeling om zulke leerlijnen in een specifieke webgebaseerde omgeving te visualiseren waarbij docenten via doorklikken en slepen steeds dieper in de essentie kunnen doordringen.



figuur 3 Fragment van een binnen het VmR-project ontwikkelde leerlijnposter Procenten

Tenslotte verdient het aanbeveling dat de (reken)docent zich verdiept in de redenen waaróm leerlingen een gegeven opgave niet kunnen oplossen. In leerling-interviews is gebleken dat daarvoor talrijke redenen zijn. Soms betreft het gebrek aan parate rekenkennis, in andere gevallen blijken leerlingen niet op het idee te komen een bepaalde berekening uit te voeren of proberen ze een rekenprobleem op informele wijze op te lossen. In het *VmR*-project worden instrumenten ontwikkeld om docenten inzicht te bieden in deze reken-blokkades en daarop adequaat te reageren. Hopelijk zullen dergelijke instrumenten ertoe bijdragen dat de scholen op termijn steeds beter toegerust zijn om het rekenonderwijs op een verantwoorde manier gestalte te geven.

Literatuur

- Expertgroep doorlopende leerlijnen (2008): *Over de drempels met rekenen.* Enschede: SLO.
- K. Buijs, P. van der Zwaart (2011): *Lesmap Verder met Rekenen.* Enschede: SLO.

Over de auteurs

Kees Buijs is als leerplanontwikkelaar werkzaam voor de SLO te Enschede.
E-mailadres: *c.buys@slo.nl*
Victor Schmidt is leerplanontwikkelaar rekenen, wiskunde en informatica bij de SLO en onder andere betrokken bij de totstandkoming van de rekentoetswijzers in het voortgezet onderwijs.
E-mailadres: *v.schmidt@slo.nl*

Statistiek als Episch Avontuur

[Daan van Schalkwijk]

**For the High King the courageous squire turns on the lights,
For students, statistics is elevated to epic heights.**

Zo dichtte een van mijn studenten [1] als reactie op mijn gedicht dat ik het afgelopen semester op verzoek voor mijn studenten heb geschreven. Dit laatste gedicht gaat over een middeleeuwse koning die in een vertrouwenscrisis verkeert, en een schildknaap die hem daaruit probeert te redden door hem statistiek te leren. Dat is wel met gevaar voor eigen leven, want de belangrijkste adviseur van de koning vindt het maar niks. De studenten vonden het leuk, daarom heb ik het online gepubliceerd als e-book. De opbrengsten van de verkoop gaan naar Harambee, een stichting die onderwijsprojecten in Afrika steunt.
Sta me toe me kort voor te stellen: mijn



naam is Daan van Schalkwijk en ik geef methodologie en statistiek aan het Amsterdam University College (AUC). Een van de grote uitdagingen van het onderwijzen van dit vak is het motiveren van de studenten, zoals de lezer – als collega-docent – vast kan beamen. Vorig jaar was op het AUC Maurits de Klepper, die een ander statistiekvak geeft, docent van het jaar. In zijn toespraak bij het aanvaarden van de prijs had hij het over de 'p-waarde' van de leraar, de persoonlijkheidswaarde wel te verstaan. Hij moedigde ons aan om een persoonlijk element in te brengen in onze lessen, om de band met de studenten te verbeteren.
Dat leek me een mooi plan.

'Betrouwbaarheidsintervallen zijn stom. Punt.'

Ik schrijf al enige tijd gedichten, eigenlijk altijd voor andere mensen, bijvoorbeeld op hun verjaardag. Aan de ene kant vind ik het leuk om te doen, maar mensen worden er ook echt blij van, als het gedicht tenminste mooi is. Dat is dan voor mij een stimulans om er echt wat van te maken.
Na Maurits' toespraak heb ik een paar van mijn gedichten in het Engels aan mijn klas laten lezen (het AUC is erg internationaal, en alle lessen zijn in het Engels) en mijn studenten gezegd dat ik best wat voor ze wilde schrijven, als ze dat leuk zouden vinden. Eén studente reageerde zeer verbaasd: 'Echt?' Toen ze de volgende les met betrouwbaarheidsintervallen worstelde, ging ze er dan ook op in: 'Schrijf maar een gedicht over betrouwbaarheidsintervallen. Betrouwbaarheidsintervallen zijn stom. Punt.' Dat was natuurlijk een uitdaging die ik niet kon laten liggen. Ik was net de *Beowulf* aan het lezen [2], en ik kreeg het idee om een kort epos te schrijven. En dat heb ik gedaan.
De studenten waren erg verrast toen ik de volgende les met de eerste helft van het gedicht kwam aanzetten. De week daarop was het af, en hebben we het in de klas voorgelezen – drie studenten lazen een rol voor, ik was de verteller. De studenten vonden het over het algemeen erg leuk, al heeft de een natuurlijk wat meer met gedichten dan de ander. De studente die om het gedicht vroeg, was in ieder geval razend enthousiast, en ik heb er veel leuke gesprekken met studenten aan overgehouden.

Afrikanen helpen zichzelf te helpen

Vanwege de positieve reacties heb ik het boek gepubliceerd als e-book online. Van een e-book gaat ongeveer 75% van de opbrengsten naar de auteur. Het leek me mooi om die opbrengsten te doneren aan Harambee USA, een stichting die kleinschalige onderwijsprojecten in Afrika steunt.[3] Ik heb hen laatst leren kennen, en hun filosofie spreekt me erg aan: *Help Afrikanen zichzelf te helpen.*
Omdat het e-book bij een Amerikaanse uitgever (Smashwords) is gepubliceerd, is een stichting in de VS handig zodat het geld zonder problemen kan worden doorgesluisd. De projecten die Harambee ondersteunt, zijn praktisch en kleinschalig: beurzen om mensen uit de sloppenwijken van Nairobi (Kenia) een opleiding tot elektricien te geven, schoolmaterialen kopen voor een nieuwe school in Congo, leraren in Nigeria verder opleiden. Praktisch en nuttig dus.
Hieronder staat het gedicht, Confidence Interval. Ik hoop dat het de lezer kan inspireren een eigen persoonlijke 'touch' aan zijn lessen toe te voegen.
Steun – Het goede doel kan worden gesteund door een e-book te kopen (de prijs bepaal je zelf), op de website van SmashWords.[4]
Het is ook mogelijk een belasting-aftrekbare gift over te maken naar rekeningnummer 6494736 ten name van Stichting De Oude Gracht, Amsterdam; onder vermelding van 'Harambee'.
Alvast hartelijk dank, en veel leesplezier!

Some seldom used English terms

Bell curve – normal or Gaussian distribution
Candid – frank and honest
Canny – shrewd and careful
Contention – assertion made in an argument
Expound – explain or make something clear by giving details
Gauge – measure; make a judgment about
May chance be – may happen to be
Ordain – order or command
Sage – very wise man
Stout – determined, brave, and resolute
Squire – young man who was a knight's attendant until he himself became a knight.
Valiant – brave or determined
(mostly from *Oxford Advanced Learner's Dictionary*)

Confidence Interval – An Epic Poem

For my Basic Research Methods and Statistics I students, at Amsterdam University College (11th of November 2012)

‘My dearest people, oh my people’
The High King sighed in his high hall,
‘Oh, how my heart desires to know you,
But could I count you? Not at all!’

‘So I have sent for sage and wizard,
To tell me how to serve you best.
But do my confidence they merit?
Oh my poor heart won’t give me rest.’

‘Oh Sire, Sire’ cried a squire,
-Was sternly told to keep his still-,
But he went on, ‘Thy need, so dire,
I can alleviate; I will!’

‘Then let him speak’ declared the High King,
A kindly smile shone in his eyes,
‘For the advice this lad will offer,
May chance be canny, if not wise.’

‘With your permission, Royal Highness’
Up stepped the squire, with rev’rend bow,
‘If it be confidence thy seeking,
I can provide it, I know how.’

‘A valiant promise, master squire,
Then let us have it, we’re all ears.’
A hidden grin ran through the courtiers,
But our stout squire knew no fears.

‘Then well, for starters, take a sample,
Take it as random as one can,
From all the people in thy country,
May they be woman, child, or man.’

‘Then from the sample, we must measure,
Whichever size thou longst to know.
It could be tallness, wideness, deepness,
Strength of arm or width of bow.

‘And now the trick, your Royal Highness,
That thee will grant thy dream so dear:
It from the averaged sample measure,
Will know your people without fear.’

‘I do object, your Royal Highness’
Cried out the kingdom’s senior sage,
‘What madness does this scoundrel tell us,
So hot of blood and young of age?’



‘Have patience, patience, wise advisor,
Let now the young man prove his claim.’
‘Well this is certainly unheard of,’
The sage then muttered, ‘on my fame.’

‘Your Royal Highness,’ said the squire,
‘Let me then liberally expound,
Confiding in your royal mercy,
The one solution I have found. . .

‘The central claim of my contention:
If now large samples one would make,
Then many means would form a bell curve,
Your people’s mean the top would take.

‘If one now has a single sample,
And wants with confidence to say,
Oh, where the people’s mean is lying:
It is surprising, but one may.

‘Say one wants confidence at level,
Of even ninety-five percent,
Then one finds all thy people’s values,
One may, from sample’s worth, defend.

The high- and lowest of these values,
Give us a bell-curve that lies so:
The sample mean does mark the outskirts,
With two-and-half percent to go.

‘And thus thou hast a range of values,
That people’s value doth contain,
In ninety-five percent of times when
Thou this procedure wouldst ordain.’

‘Onto the gallows’ cried the sage then,
The anger flushing in his face,
‘What blackest magic he expoundeth,
He rings a bell and lifts a haze.

‘Sire even if you found it candid,’
Went on the sage in breathless tone,
‘For all his valiant youthful promise,
Thy getst thy people’s mean alone.’

‘Beloved High King’ cried the squire,
His features raging with alarm.
But now the High King would have silence:
He raised majestically his arm.

‘My sage, thy words have proved thy wisdom
When even angered, all the same,
But then for thy request to hang him:
Well, oh my good Lord, oh for shame!

‘For indeed the boy proved canny,
Though perchance he be not wise.
And though there be some boastful promise,
There’s loyal service in his eyes.’

‘And it’s just this, young master squire,
That all your measures do not show:
For I would gauge my people’s spirit,
Their faithful loyalty to know.

‘And therefore, for your boastful promise,
You from your squire state I’ll fling.
For your intelligence and daring,
You’re now the student of the King.

‘Full well I recognise the promise,
Held by the method that you show.
But it requires a humble spirit,
Its strengths and weaknesses to know.

‘So study numbers, nice and certain,
Of people’s money, strength, and arts.
But let all hearers now remember:
The King cares more for people’s hearts!’

De eerste ronde van NWO 2013

[Birgit van Dalen]

Questions to aid reflection
These questions can be used for private reflection, but are perhaps most effective as discussion questions in a seminar or in an in-class discussion.
For statistics students

- Could you reproduce in your own words the squire's explanation on the construction and interpretation of confidence intervals? Do you follow what he says?
- The King remarks that the sage has spoken wisely, except for his condemnation of the squire. Do you agree with the sage? Is it true that a confidence interval only gives information about the population's mean, or is there more to it? What valid point does the sage's position imply?
- The King's final words point towards the strengths and weaknesses of statistics. How would you formulate the strengths of statistical theory, and how would you formulate its limits?

Noten [Red.]
[1] Job Zegers, student Basic Research Methods and Statistics I aan het Amsterdam University College.
[2] Zie: *http://nl.wikipedia.org/wiki/Beowulf_(gedicht)*
[3] Zie: *http://harambeeusa.org* of ook *http://www.harambeeholland.nl*
[4] Zie: *www.smashwords.com/books/view/262575*

Over de auteur
Daan van Schalkwijk is docent aan het Amsterdam University College, waar hij zowel methodologie en statistiek als systeembiologie geeft. Daarnaast is hij wetenschappelijk onderzoeker bij TNO en voorzitter van het Leidenhoven College, een kleinschalige 'collegiate hall of residence' in Amsterdam.
E-mailadres: *D.B.vanSchalkwijk@auc.nl*

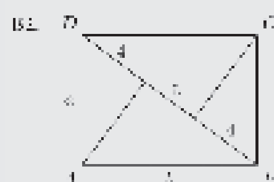


Van 21 tot en met 31 januari j.l. heeft de eerste ronde van de **Nederlandse Wiskunde Olympiade** plaatsgevonden. Scholen konden dit jaar voor het eerst zelf een geschikte datum kiezen binnen deze periode.

Wilt u zelf ook de uitdaging aangaan, dan vindt u hierna de opgaven van deze wedstrijd. Uitwerkingen zijn te vinden op « *www.wiskundeolympiade.nl* ».
De beste leerlingen uit de drie categorieën onderbouw, vierde klas en vijfde klas – in totaal ongeveer 800 – zijn uitgenodigd om deel te nemen aan de tweede ronde op een universiteit bij hen in de buurt.
De opgaven van de *tweede* ronde (die op 15 maart is gehouden) worden gepubliceerd in een volgend nummer van *Euclides*.

B-vragen

B1 [illegible] de cijfers 2, 4 en 5, waarbij elk van deze cijfers [illegible] door 4?

B2 

[illegible] $ABCD$ [illegible] uit A en C op de diagonaal BD verdelen die diagonaal in drie stukken met lengtes 4, 5 en 4.
Bereken $\frac{a}{b}$.

B3 [illegible]

B4 [illegible]

[illegible]

[illegible] 2013 in [illegible]

NWO 2013
OPGAVEN EERSTE RONDE

- Beschikbare tijd: 2 uur.
- De A-vragen zijn vijfkeuzevragen. Bij elke vraag is één van de vijf mogelijkheden juist. Voor een goed antwoord krijg je 2 punten, voor een fout antwoord 0 punten.
  Bij de B-vragen moet je een of meerdere getallen als antwoord geven. Voor een goed antwoord krijg je 5 punten en voor een fout antwoord 0 punten. Werk dus rustig en nauwkeurig, want een kleine rekenfout kan tot gevolg hebben dat je antwoord fout is.
  LET OP: geef je antwoorden in exacte vorm zoals $\frac{1}{4}$ of $2 + \sqrt{5}$ of $\frac{1}{2}\pi - 1$.
  Je mag geen rekenmachine gebruiken en geen formulebladen. Alleen pen en papier, een passer, een liniaal of geodriehoek en natuurlijk je gezonde verstand.

A-vragen

A1. Een verkeerslicht staat om en om een bepaalde tijd op groen en op rood. De perioden groen en rood duren even lang, elk of steeds 1, 2 of 3 minuten. Er zijn vier kleurcombinaties voor het licht op de tijdstippen 12:04 en 12:08: rood rood, rood groen, groen rood en groen groen.
Hoeveel van de vier combinaties zijn mogelijk als gegeven is dat het licht om (precies) 12:05 op rood sprong en om (precies) 12:12 ook op rood?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) Het licht kan niet op zowel 12:05 als 12:12 rood springen.

A2. Rechthoek $ABCD$ is verdeeld in vijf gelijke rechthoekjes. De omtrek van elk van deze rechthoekjes is 20.
Wat is de oppervlakte van rechthoek $ABCD$?

A) 72 B) 112 C) 120 D) 140 E) 150

A3. Voor de getallen a, b, c, d en e geldt:

$$a + b + 1 = b + c + 2 = c + d + 3 = d + e + 4 = e + a + 5$$

Welk van deze vijf getallen is het grootst?

A) a B) b C) c D) d E) e

A4. Negen lampjes zijn in een vierkant opgesteld. Elk lampje kan aan of *uit* zijn. Als je op een lampje drukt, veranderen dat lampje en de lampjes in dezelfde rij of kolom van toestand: van *aan* naar *uit* of omgekeerd. In het begin zijn alle lampjes aan.
Wat is het kleinste aantal keer drukken dat nodig is om alle lampjes uit te krijgen?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 9 E) Dat kan niet.

A5. Van een stapel dozen is gegeven dat een kwart van de dozen leeg is. We openen een kwart van de dozen en zien dat een vijfde daarvan niet leeg is.
Welk deel van de ongeopende dozen is leeg?

A) $\frac{4}{15}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{15}$ D) $\frac{1}{16}$ E) $\frac{1}{20}$

A6. Een regelmatige zeshoek en een gelijkzijdige driehoek hebben dezelfde omtrek.
Wat is verhouding *oppervlakte zeshoek* : *oppervlakte driehoek*?

A) 2 : 3 B) 1 : 1 C) 4 : 3 D) 3 : 2 E) 2 : 1

A7. Wat zijn de laatste vier cijfers van 5^{2013}?

A) 0625 B) 2525 C) 3125 D) 5625 E) 8125

A8. Twintig meisjes hebben een toets gemaakt. Geen twee meisjes hebben hetzelfde aantal vragen goed beantwoord. Elke vraag was door hoogstens drie meisjes goed beantwoord.
Wat is het kleinste aantal vragen dat de toets kan hebben?

A) 63 B) 64 C) 67 D) 70 E) 71

Contexten als basis voor wiskundig redeneren

[Irene van Stiphout en Geeke Bruin-Muurling]

Inleiding

In het curriculum van het voortgezet onderwijs staan verbanden centraal. In de onderbouw wordt er veel aandacht besteed aan lineaire verbanden. Bij de introductie van deze verbanden spelen contexten een belangrijke rol.
In dit artikel bespreken we de beperkingen die kunnen voortkomen uit gebruik van een eenzijdig type opgaven. We laten zien hoe creatief omgaan met deze contexten zou kunnen zorgen voor een basis die meer ruimte laat voor bijvoorbeeld generaliseerbaarheid.

Een voorbeeld

Bij de introductie van lineaire verbanden worden vaak contexten gebruikt die gebaseerd zijn op een kostenstructuur van een vast starttarief en een tarief per tijdseenheid, oftewel een vast deel en een variabel deel van de kosten. Zo'n context kan bijvoorbeeld de huurprijs van een caravan zijn die afhankelijk is van het aantal dagen, en waar bovenop een bedrag voor de schoonmaakkosten wordt gerekend.
We nemen deze context hier even als uitgangspunt om aan te geven wat er voor leerlingen een rol kan spelen.
Een eerste punt is de vraag in hoeverre een dergelijke context als betekenisvol wordt ervaren door leerlingen. Veel leerlingen zullen uit ervaring weten dat de kosten van een vakantie niet op een dergelijke manier worden berekend. Leerlingen hebben als het ware te veel kennis van de context en vinden versimpeling van de situatie lastig of niet realistisch. Maar ook wiskundig is er iets aan de hand met dit soort contexten. Zouden we namelijk de grafiek van deze of een soortgelijke situatie met vaste en variabele kosten tekenen dan zouden deze er ongeveer uit zien als ***in figuur 1***.
We hebben hier te maken met een trapfunctie, omdat de kosten per tijdseenheid worden berekend; de kosten veranderen per tijdseenheid en niet continu zoals in een strikt lineair verband. Dit onderscheid wordt overigens over het algemeen niet gemaakt omdat er naar discrete waarden wordt gekeken en bijna stilzwijgend een rechte lijn door deze puntengrafiek wordt getrokken.
Fundamenteler van aard is de discontinuïteit bij de verticale as. Als er niet gehuurd wordt, dan wordt er ook niets betaald. De schoonmaakkosten worden immers pas in rekening gebracht als er ten minste één dag wordt gehuurd. In de schoolboeken wordt dit punt vaak onbesproken gelaten, en komt de lijn die door de puntengrafiek wordt getrokken wel uit bij het tarief voor de schoonmaakkosten op de verticale as.

Lineair verband als model van de werkelijkheid

In het voorbeeld komt naar voren dat contexten met een kostenstructuur met een vast starttarief en een tarief per tijdseenheid niet 'perfect lineair' zijn. De lineariteit is een versimpeling van de werkelijkheid: een zinvolle modellering die het mogelijk maakt om 'makkelijk' te rekenen in de context, en die bovendien in veel verschillende contexten een rol speelt. Naast de genoemde twee beperkingen zijn er nog twee veel voorkomende beperkingen van contexten voor lineaire verbanden:

1. In de context zijn het domein en het bereik beperkt in de grootte. De x-waarde en y-waarde zijn bijvoorbeeld niet negatief; het verband ligt in het eerste kwadrant. Of de x-waarde mag niet te groot zijn; een caravan is bijvoorbeeld niet te huur voor 100 jaar.
2. Het verband in de context is stijgend. Dalende verbanden (zoals de hoogte van een kaars afhankelijk van het aantal branduren) komen weinig voor en hebben vaak geen betekenis voor negatieve y-waarden.

De context als startpunt voor verder wiskundig redeneren

Waar het voor leerlingen misschien wel duidelijk is dat er lineaire verbanden zijn in het dagelijks leven en dat je ze daarom bij wiskunde bestudeert, zien leerlingen dat hoogstwaarschijnlijk niet bewust als 'benaderingen' en dus niet als modellen van de werkelijkheid. Dat zorgt voor een drietal bezwaren.
Ten eerste, als er niet expliciet met leerlingen wordt gesproken over de punten waarop de werkelijkheid of de context afwijkt van de 'perfecte lineariteit', dan wordt de kans gemist om de kracht van wiskundig modelleren te laten zien.
Ten tweede wordt de indruk gewekt dat er veel meer lineair is dan er in werkelijkheid is. In ieder geval worden leerlingen niet getraind om kritisch te kijken naar de werkelijkheid die ze modelleren.
Ten slotte kan het problemen opleveren bij het gebruiken van de context als startpunt voor wiskundig redeneren; de andere functie van de context. Op dit laatste punt zullen we verder ingaan.
Dat contexten afwijken van de perfecte lineariteit zien we niet als probleem voor het gebruik van contexten als startpunt voor wiskundig redeneren. Wel een probleem is de eenzijdigheid van punten waarop ze afwijken. De mogelijkheid ontstaat dat eenzelfde 'beperking' die in alle aangeboden contexten voorkomt, als onderdeel gezien wordt van de wiskundige structuur. Als bijvoorbeeld in geen enkele context $x = 0$ betekenis heeft, dan zijn die contexten niet geschikt als bron voor de begripsinvulling van het snijpunt met de verticale as en de verbinding met b in de algemene formule $y = ax + b$.
We zien dan een gat ontstaan in de overgang van contexten naar formele wiskunde. Als de wiskundige structuur van de contexten niet voldoende duidelijk wordt of als daarin verkeerde dingen worden meegenomen, dan kunnen leerlingen in de problemen komen om hun informele strategieën, die ze in de contexten konden gebruiken, te verbinden met het formele niveau waar ze uit moeten komen. Daarmee verliezen contexten aan kracht omdat ze dan niet langer dienen als startpunt voor wiskundig redeneren.

Het versterken van de basis

Om de contexten als basis voor wiskundig redeneren te gebruiken zien we een aantal aandachtspunten.

- Leerlingen moeten de relatie gaan zien tussen de verschillende contexten in de opgaven. Die relatie is het wiskundige model dat beschreven wordt in het lineair verband. Het lineaire verband

is dus een model van de context waarbij de werkelijkheid (uiteraard) wordt vereenvoudigd. We denken dat leerlingen baat hebben bij een explicitering van de punten waarop de werkelijkheid is versimpeld.

- Als opgaven in samenhang worden gezien, kunnen er actief verbinding worden gelegd tussen de contexten en de wiskundige inhoud waarvan het de bedoeling is dat leerlingen uitkomen.

De contexten kunnen door een docent worden aangedragen, maar het zoeken naar contexten kan ook een zinvolle activiteit voor leerlingen zelf zijn. Door de lijst van genoemde vereenvoudigingen ten opzichte van de werkelijkheid als uitgangspunt te nemen kunnen meer gevarieerde contexten worden gevonden. Dan dienen zich wellicht contexten aan die meer betekenis hebben in de werkelijkheid en die niet geconstrueerd zijn om te kunnen dienen als startpunt voor verder wiskundig redeneren. Dan komen wellicht contexten naar voren als het nabestellen van foto's met verwerkingskosten, maar ook verschillende kosten per stuk afhankelijk van het aantal na te bestellen foto's. Het omrekenen van bijvoorbeeld temperatuur in Fahrenheit, Celsius en Kelvin waar je te maken hebt met verschuiving en 'vervorming' van de schaal. En meer in zijn algemeenheid het omrekenen van allerlei maateenheden naar de standaard SI-eenheden. Andere schoolvakken kunnen dan ook een bron van inspiratie worden, zoals vraag- en aanbodfuncties, $q_v = -\frac{1}{2}p + 8$ en $q_a = 2p - 7$, bij economie en $s = vt$, $v = at$ en $V = I \cdot R$ bij natuurkunde.

Ten slotte denken we dat leerlingen erbij gebaat zijn om op tijd de overgang te maken van het zien van de context als het oplossen van een particulier probleem naar het zien van de context als een representatie van een wiskundige structuur. In het voorbeeld van de huurprijs van de caravan betekent dit dat het niet gaat om het antwoord op de vraag wat twee weken kost, maar dat het gaat om het herkennen van de algemene structuur van een lineair verband als bestaande uit een vast en een variabel deel.

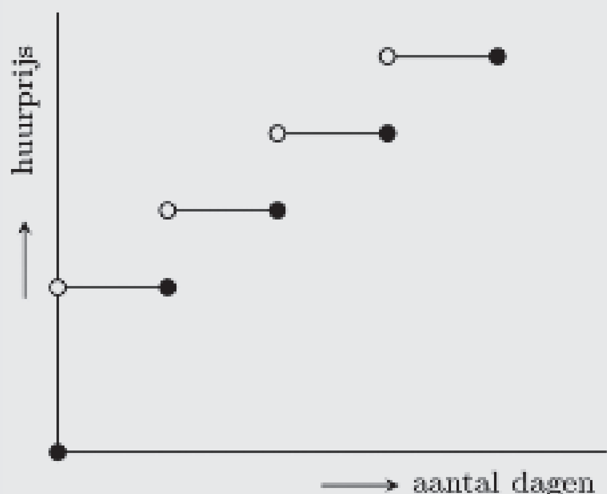
Dan opent zich ook de mogelijkheid om de grenzen op te gaan zoeken, een authentieke wiskundige activiteit. Zo kun je gaan kijken of allerlei denkbare lijnen in een assenstelsel zich laten beschrijven als $y = ax + b$, zoals horizontale lijn, verticale lijn, lijn door de oorsprong, dalende en stijgende lijnen en lijnen in de verschillende kwadranten.

Conclusie

We hebben in het voorgaande laten zien dat er belangrijke, inherente beperkingen zitten in de algemeen gebruikte contexten van lineaire verbanden. Het gebruik van gevarieerde contexten met een mix van de genoemde beperkingen biedt hiervoor de oplossing. Het is dan van belang dat leerlingen focussen op de aspecten van de contexten die ook wiskundig van belang zijn, zoals de invloed van het variabele en constante deel, en niet meer worden afgeleid door toevallige overeenkomsten in de contexten die wiskundig minder van belang zijn. Die overgang van contexten naar een model voor wiskundig redeneren moet door leerlingen misschien wel bewuster worden gemaakt.

Lukt het niet om deze overgang goed te maken dan staat de rol van de contexten als startpunt voor wiskundig redeneren onder druk. Het gevaar is dat je dan op een dubbel didactisch spoor uitkomt: een begin in de contexten, en los daarvan een introductie op formeel niveau (zie [1]).

Kortom: het gebruik van contexten als basis voor wiskundig redeneren vraagt om het verbinden van die contexten, het herkennen van de gezamenlijke structuur en een zorgvuldige overgang van de contexten naar de beoogde wiskundige inhoud.



figuur 1 De grafiek van de voorbeeld-opgave van de huurprijs van een caravan

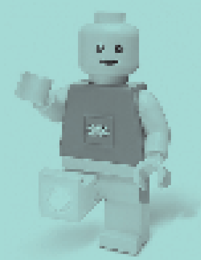
Literatuur

[1] I.M. van Stiphout (2011): *The development of algebraic proficiency*. Proefschrift, Technische Universiteit Eindhoven.

Over de auteurs

Irene van Stiphout en Geeke Bruin-Muurling zijn beiden gepromoveerd bij de Eindhoven School of Education.
Irene promoveerde in 2011 op een onderzoek naar de ontwikkeling van algebraïsche vaardigheden. Ze werkt nu als toetsdeskundige bij het Cito.
Geeke promoveerde in 2010 op een onderzoek naar de rol van breuken in de aansluiting van basisschool naar voortgezet onderwijs. Ze werkt als onderzoeker bij de TU/e.

Legoman



[Desiree van den Bogaart]

Op de NVvW-studiedag in november 2012 heb ik een workshop gegeven over een werkvorm die ik afgelopen jaar heb ontwikkeld: legoman. De reacties van de deelnemers waren positief, wat maakt dat ik de werkvorm langs deze weg met een breder publiek wil delen. In dit artikel vertel ik hoe de werkvorm is ontstaan, hoe het werkt en wat je er mogelijk zelf mee kunt doen in je wiskundeles. Aan het eind noem ik nog enkele ervaringen van deelnemers aan de workshop, die mij daarvan inmiddels op de hoogte hebben gesteld.

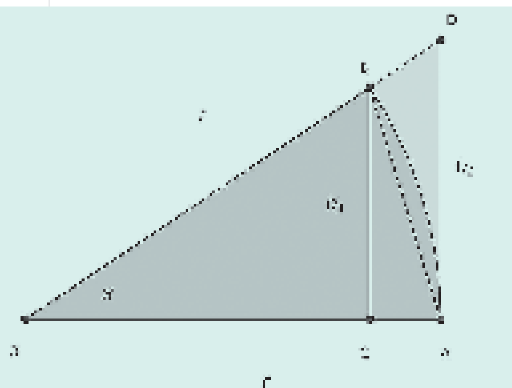
Tijdens mijn studie wiskunde was ik op excursie bij een bedrijf in Den Haag. Als kennismakingsactiviteit speelden wij toen *legoman*, een spel waarbij we in groepjes een bak LEGO® kregen en zo snel mogelijk een mannetje moesten nabouwen dat in een andere ruimte lag. Ieder lid van het groepje mocht een keer gaan kijken bij het mannetje en kon dan aan de groep vertellen wat hij had gezien. De werkvorm maakte indruk op mij, door de eenvoud en de effectiviteit. Van de presentatie van de rest van het bedrijf kan ik me weinig meer herinneren, behalve het uitzicht over Den Haag vanuit de vergaderzaal.
Dat maken we in het onderwijs natuurlijk regelmatig mee: je verzorgt een prachtige les, maar de leerlingen onthouden alleen dat je nieuwe schoenen aan had die dag. Conclusie: *legoman* moet worden ingezet in de wiskundeles.

Activerende didactiek

Eind vorig jaar kreeg ik lesbezoek van mijn leidinggevende. Ik werkte nog niet zo lang aan de Hogeschool van Amsterdam en wilde een visitekaartje afgeven van mijn ideeën over activerende didactiek. Ik gaf een eerstejaarscollege analyse. Op het programma van die les stond het bewijs van de limiet:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Nu is mijn ervaring dat het goed te doen is iets dergelijks klassikaal uit te leggen, maar als het gaat om het laten reproduceren van bewijzen door studenten, wordt het meestal domweg uit het hoofd geleerd in plaats van het bewijs echt te proberen te begrijpen.
Ik wilde ze juist het bewijs zelf laten doorgronden, in de hoop dat het dan beter zou beklijven. En ze bovendien de ervaring laten opdoen dat het beter werkt om je een bewijs eigen te maken, dan het stampen. Dit was het moment voor het debuut van legoman.
Het plan was op hoofdlijnen gauw gemaakt. Ik zou enkele exemplaren van het bewijs op de gang leggen en de studenten mochten maximaal één keer gaan kijken en zo proberen met elkaar het complete bewijs te snappen in tijd van een half uur. Omdat het risico bestond dat ze dit als te moeilijk zouden ervaren en het niet goed van de grond zou komen, kregen ze van mij een startkaartje (***zie figuur 1***) met een hint er op. Bovendien konden ze dat kaartje mooi bij mij inleveren als ze gingen kijken, zodat ik enig zicht had op de voortgang. En die kaartjes kon ik aan het eind weer gebruiken om door middel van loting te bepalen wie het bewijs klassikaal moest gaan uitleggen.



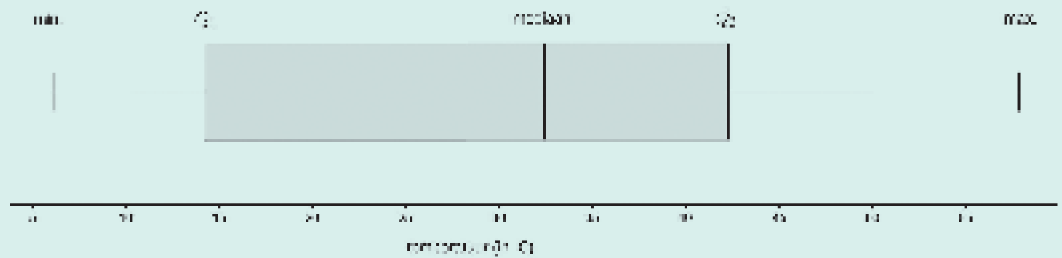
figuur 1

Pareltje

Het resultaat was een onverwacht groot succes. Mijn leidinggevende noemde het achteraf 'een pareltje van een les'. We hebben samen uiteengerafeld in de nabespreking wat maakte dat het nou zo goed ging, want hoewel ik de les grondig had voorbereid, wil dat nog niet zeggen dat ik alles precies zo had voorzien en zo bedoeld had. Dit wil ik graag benadrukken, want het is vaak een kwestie van experimenteren en vervolgens zorgvuldig analyseren wat er is gebeurd in je les, om tot iets moois te komen dat je kunt herhalen.

De eerste conclusie in de nabespreking was dat de werkvorm zeer effectief was in het aanzetten tot waardevolle gesprekken over wiskunde. De wederzijdse afhankelijkheid is groot en onmiskenbaar. Je hebt de informatie van anderen nodig om zelf weer goede informatie voor de groep te kunnen halen. Je wilt begrijpen waar de anderen mee terug komen, want uiteindelijk zal je zelf het hele verhaal moeten kunnen navertellen. Er is dus duidelijk sprake van individuele aanspreekbaarheid. Het zal toch maar gebeuren dat jouw kaartje uit de stapel komt!

Een tweede belangrijke observatie was dat er vanaf de eerste seconde actief werd deelgenomen door alle studenten. De reden bleek het startkaartje. Daar stond een plaatje op, dat de kern vormde van het bewijs. Het veroorzaakte gesprekken over de benodigde voorkennis, het maakte nieuwsgierig naar de rest en het maakte dat het groepje ook al aan de gang kon zonder dat er iemand al was gaan kijken of terwijl de eerste weg was. Het werkte zelfs zo motiverend, dat de meeste groepjes er toe aangezet moesten worden



figuur 2

om iemand voor het eerst te laten kijken. Ze wilden het eigenlijk zo lang mogelijk zelf doen. Deze situatie blijkt zich eigenlijk steeds voor te doen als ik de werkvorm toepas en dit krijg ik nu ook vaak te horen van collega's die een keer legoman hebben gedaan in hun les.

Faalangst

Toen het half uur voorbij was, heb ik alle overgebleven kaartjes opgehaald van de paar studenten die niet bij het bewijs waren gaan kijken. Door middel van loting van alle startkaartjes werd bepaald wie er voor het bord moest komen. Deze student durfde niet goed, maar durfde ook niet echt te weigeren. Ik kon haar overhalen, door te zeggen dat als ze echt vast zou lopen, zij een volgend kaartje uit de stapel mocht trekken om te bepalen wie haar zou aflossen voor het bord. Dat werkte erg goed. Bij de workshops op de studiedag kreeg ik meermaals de vraag of deze werkvorm niet een probleem is voor faalangstige kinderen. De genoemde oplossing werkt prima.
Daarnaast had ik tijdens de les rondgelopen en de studenten die wiskundig wat minder sterk zijn aangesproken om te overleggen hoe ze toch konden bijdragen. Bijvoorbeeld door als eerste te gaan, als 'verkenner', of door als gespreksleider op te treden. Tijdens de workshops merkte een deelnemer op dat deze werkvorm, ondanks dat het een groepsactiviteit is, ook ruimte laat om binnen de groep op je eigen manier te werken. Als je zo min mogelijk informatie van de gang wilt hebben en zo ver mogelijk zelf wilt komen, dan kan dat.

Meer ervaringen

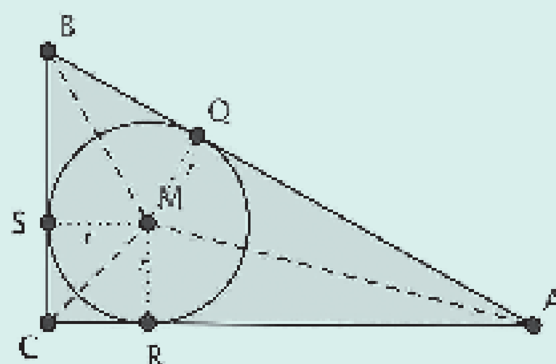
In de loop van het jaar heb ik bij meerdere colleges legoman gespeeld. Bij een voortgezet analysevak, bij meetkunde en zelfs een keer met de legoblokjes van mijn kinderen bij een college vakdidactiek over ruimtelijk inzicht. Het was telkens een succes. Tijdens de workshops op de studiedag heb ik met de aanwezige wiskundedocenten nagedacht over hoe deze werkvorm toe te passen is met klassen die niet met bewijzen bezig zijn. Er kwamen ideeën zoals:

- Uitwerkingen op de gang van een (proef-)toets.
- Uitleg op de gang van hoe een boxplot getekend moet worden. Het startkaartje zou dan iets kunnen zijn als ***in figuur 2.***

Inmiddels heb ik van een aantal deelnemers de eerste ervaringen binnen:

- een vwo-5 klas heeft de stelling van Pythagoras bewezen met behulp ***van figuur 3*** (hetzelfde bewijs als in de workshop van de studiedag);
- een andere vwo-5 klas heeft een gemaakt schoolonderzoek ingezien doordat de juiste uitwerkingen op de gang hingen;
- een vwo-3 klas heeft de *abc*-formule geleerd via legoman.

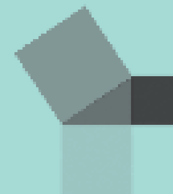
Ik heb nog geen ervaringen van vmbo- of havo-klassen gehoord. Het idee van de boxplot kwam juist van enkele vmbo-docenten. Het lijkt mij dat het goed mogelijk is, mits de activiteit en de uitleg goed op het niveau van de leerlingen zijn afgestemd. Ik hoop gauw dergelijke berichten van collega's te ontvangen.



figuur 3

Over de auteur
Desiree van den Bogaart is docent wiskunde en lerarenopleider aan de Hogeschool van Amsterdam.
E-mailadres: *d.a.van.den.bogaart@hva.nl*

WisBase.nl – Toetsen en Lesmateriaal



2013: EEN NIEUWE START

[Erik van den Hout]

WisBase is een website waar wiskundeleraren toetsen en lesmateriaal kunnen uitwisselen. Al bijna tien jaar is Erik van den Hout in diverse rollen betrokken bij WisBase. In dit artikel geeft hij een overzicht van de ontwikkeling van WisBase de afgelopen jaren. Maar hij kijkt ook naar wat de toekomst brengt: een nieuwe website met nieuwe mogelijkheden. Tot slot doet hij de leden van de NVvW een mooi aanbod.

In het begin

Aan het einde van het vorige millennium werd het internet een steeds belangrijkere plaats om lesmateriaal en toetsen uit te wisselen. Rond 2000 namen Bram Theune, David van Oorschot en Paul van Dijk het initiatief om verschillende websites aan elkaar te koppelen, opdat wiskundeleraren op één plaats toetsen kunnen vinden. Naar aanleiding hiervan wordt op 19 maart 2002 de stichting WisBase opgericht door het hierboven genoemde drietal. Het biedt een formele organisatie waardoor het onder andere mogelijk wordt om op een correcte manier fondsen te werven.

WisBase.nl – Feiten
Aantal deelnemers: 158
Aantal scholen: 101
Aantal beheerders: 20
Aantal toetsen onderbouw vmbo en havo/vwo: 1100+
Aantal toetsen bovenbouw havo/vwo: 2500+

Een nieuw gezicht

Bram Theune en David van Oorschot zijn jarenlang de drijvende kracht achter WisBase. Samen met de beheerders van de methodepagina's groeit WisBase.nl uit tot een grote verzameling van toetsen en ander lesmateriaal. Ik sluit me in 2004 aan bij WisBase als ik vanuit de ICT-wereld de overstap maak naar het onderwijs. In eerste instantie ben ik alleen als deelnemer betrokken bij WisBase, maar al vrij snel (eind 2005) neem ik het technisch beheer van WisBase over van Erwin Broekema. Begin 2010 laat Bram Theune onder andere in een interview in *Euclides* [2] weten dat hij zich zorgen maakt over de continuïteit van WisBase. Zowel hij als David van Oorschot naderden de pensioengerechtigde leeftijd. Na enkele verkennende gesprekken word ik op 1 oktober 2010 officieel voorzitter van de stichting WisBase. Bram en David nemen de taken van respectievelijk secretaris en penningmeester op zich. Dit is tot op dit moment nog steeds de samenstelling van het bestuur van de stichting WisBase.

Vernieuwing van de website

Ook in 2010 gebruiken en analyseren studenten van de Fontys Lerarenopleiding in Tilburg WisBase tijdens hun lessen vakdidactiek. Het blijkt dat WisBase door de studenten niet altijd even gebruikersvriendelijk werd bevonden. Met name het zoeken naar een juiste toets is lastig.
Het bestuur van WisBase maakt op basis van deze en eigen bevindingen een plan voor een vernieuwing van de website. Gedurende 2012 wordt het grootste deel van het jaar door twee studenten van de Open Universiteit gebruikt om een nieuwe basis voor de WisBase website te ontwikkelen. Op het moment dat ze het aantal uren dat voor het eindproject gepland staat verbruikt hebben, is er helaas geen volledig werkende website. Voor WisBase heeft het wel meer inzicht gegeven in de complexiteit van de website en de processen die daaraan verbonden zijn. Op basis van deze inzichten worden de nieuwe specificaties opgesteld.
Het bedrijf Drijvers-IT wordt uiteindelijk de opdracht gegund vanwege ervaring met het ontwikkelen van webtoepassingen voor het onderwijs.

De financiering van WisBase

Een website kost geld en zeker als een nieuwe website ontwikkeld moet worden. Gelukkig sponsoren enkele scholen WisBase, sommige al jaren. Maar we zien het aantal sponsorscholen de laatste jaren fors teruglopen. Op dit moment zijn er 5 scholen die WisBase financieel ondersteunen. Maar met alleen deze sponsoring is het niet mogelijk om de website en de vernieuwing te betalen.
De NVvW is al jaren de hoofdsponsor van WisBase. Zij faciliteert de taken van het dagelijks bestuur door een detachering van de voorzitter en stelt ook geld beschikbaar voor de hosting van de site. Toen het bestuur van WisBase een beroep deed op de vereniging om de ontwikkeling van de nieuwe website te financieren, kregen we hierop een positief antwoord. Zonder het jarenlange vertrouwen dat de NVvW in WisBase heeft gesteld, had de website nooit kunnen uitgroeien tot de site die ze nu is. Doordat de NVvW ook haar vertrouwen in WisBase uitspreekt door de vernieuwing te faciliteren, zal aan het begin van het tweede kwartaal van 2013 de nieuwe website beschikbaar zijn.

Toetsen van pilotscholen cTWO
Het pilotlesmateriaal van de Commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs (cTWO) is beschikbaar op hun website. De leraren van de pilotscholen zochten echter een plaats waar ook toetsen uitgewisseld kunnen worden. In tegenstelling tot het lesmateriaal wilden ze toetsen niet openbaar publiceren. Op verzoek van Marian Kollenveld (voorzitter van de NVvW) nam WisBase contact op met Peter van Wijk van cTWO. Dit overleg leidde tot een samenwerking die nog steeds voortduurt: de leraren van de pilotscholen zijn deelnemers van WisBase geworden en op WisBase.nl staat nu een aanzienlijke verzameling toetsen die op de pilotscholen zijn afgenomen.

De toekomst

Maar wat verandert er dan met de komst van een nieuwe website? Het blijft een website met lesmateriaal gericht op het wiskundeonderwijs. Een groot deel van de website zal door iedereen gebruikt kunnen worden: GeoGebra-applets, lesmateriaal, het archief van de MULO-examens met uitwerkingen. Alleen de toetsen blijven achter een slot staan en zijn alleen beschikbaar voor wiskundeleraren. Alle deelnemers kunnen materiaal plaatsen in het open gedeelte. Iedereen die materiaal plaatst geeft het vrij onder een *Creative Commons licentie* (by-nc-sa) en verklaart ook het recht te hebben om dit te doen. Deze licentie regelt dat iedereen die materiaal van WisBase gebruikt, er alles mee mag doen, mits de naam van de maker vermeld wordt, er geen geld aan verdiend wordt en bij verspreiding van een aangepaste versie de zelfde licentie wordt gebruikt.
Van oudsher is het zo dat leraren deelnemer kunnen worden door toetsen in te leveren. Dit principe blijft gehandhaafd: alvorens een leraar de mogelijkheid krijgt om toetsen te downloaden, moeten eerst toetsen geplaatst en goedgekeurd worden. Iedere actie op de website wordt gehonoreerd met downloadtijd. Voor het inleveren van een toets die ook goedgekeurd is, krijgt een leraar bijvoorbeeld 6 maanden toegang. Voor het beoordelen van een toets van een collega (tot aan plaatsing of terugtrekking van de toets door de eigenaar) wordt 3 maanden toegang verleend. *Voor leden van de NVvW geldt een bonus van 1 maand*. Het is belangrijk dat WisBase een gemeenschap van samenwerkende leraren is en niet een plek waar alleen gehaald wordt. Deze werkwijze garandeert ook voortdurende vernieuwing van het materiaal op de site.
Voordat een wiskundeleraar het recht krijgt toetsen te bekijken of te downloaden, controleert het dagelijks bestuur of het echt een leraar betreft door contact op te nemen met de school van de docent. Leerlingen zijn inventief en proberen af en toe om toegang te krijgen tot de toetsen. Persoonlijke controle van de aanmelding voorkomt dit.
Twintig beheerders verzorgden de controle van de nieuwe ingeleverde toetsen op de oude website. Hun taak was tweeledig: aan de ene kant controleren of een toets vrij is van auteursrechten maar ook of deze voldoet aan de kwaliteitseisen die gesteld worden (omvang, uitwerkingen enz.).
Een groot probleem was een gebrek aan beheerders die ervaring hebben met de pagina die ze beheren. Ik fungeer bijvoorbeeld als vangnet, maar ik kan onmogelijk van de diverse methodes weten of een opgave echt auteursrechtenvrij is. Dit was een probleem van de organisatie op de huidige website die de nieuwe site naar verwachting zal oplossen.
Op de nieuwe site zijn namelijk alle deelnemers tevens *revisoren*. De taak van de revisor is vergelijkbaar met de taak van de huidige beheerders: controleer of de toets vrij is van auteursrechten, kwalitatief in orde is en volledig (dus inclusief antwoorden of uitwerkingen). Als dat zo is, zal de revisor de toets accorderen en wordt de toets beschikbaar voor iedereen. Mocht er iets niet in orde zijn, dan informeert de revisor de eigenaar van de toets. De eigenaar kan er dan voor kiezen om een nieuwe versie in te leveren, waarin de opmerkingen van de revisor zijn verwerkt of de toets terug te trekken. Een nieuwe versie wordt door de zelfde revisor beoordeeld.
Maar niet alleen de wijze waarop het materiaal geplaatst wordt, verandert, ook het gebruik van de website om materiaal te vinden ondergaat een metamorfose. Op de oude site waren de toetsen gegroepeerd op niveau, leerjaar en methode. Dit is ook de wijze waarop een leraar materiaal zoekt. Maar hierdoor was het moeilijk om toetsen te vinden die gemaakt zijn voor andere methoden, maar die verder uitstekend passen bij het onderwerp dat getoetst moet worden. Potentieel materiaal dat prima past, werd door leraren simpelweg niet gevonden omdat het gekoppeld was aan een andere methode.
De nieuwe website zal deze ordening niet als basis hebben. We stappen over op een soort zoekmachine. Aanvullende gegevens zoals methode, niveau en sleutelwoorden worden aan elk element in WisBase toegevoegd. Deze zogenoemde metadata is de basis voor elke zoekactie op de website. Zo kan een leraar met één zoekopdracht al het materiaal in WisBase vinden dat past bij het onderwerp waarvoor materiaal gezocht wordt.

Vrijwilligers

Belangrijk voor de toekomst van WisBase is dat er voortdurend nieuw materiaal geplaatst wordt. Ook het reeds bestaande materiaal is toe aan een grondige herziening. Al het beschikbare materiaal wordt overgezet naar de nieuwe website en het is belangrijk dat er op dat moment ook nog eens goed gekeken wordt naar de kwaliteit van het materiaal. Voldoet het nog? Is het volledig? Een keer goed snoeien is voor een plant vaak erg goed; hetzelfde geldt voor het materiaal dat nu de verhuizing zal maken. Voor deze taak kunnen we overigens nog vrijwilligers gebruiken. Dus als u interesse hebt neem dan contact met me op.

Aanbieding voor NVvW-leden

Zoals al eerder in dit artikel vermeld, is de NVvW de hoofdsponsor van WisBase. Daarom geldt voor leden van de vereniging een bijzondere aanbieding. Zodra de nieuwe site 'live' is, kunnen zij zich direct aanmelden als deelnemer van WisBase. Door het lidmaatschapsnummer van de vereniging te vermelden krijgen ze direct toegang tot WisBase als leraar en kunnen voor een periode van 3 maanden ook toetsen downloaden.
Nadat een deelnemer tenminste één toets heeft geplaatst, blijft de deelname ook na deze drie maanden actief en gelden verder de reguliere voorwaarden voor deelname. Het voordeel dat leden van de vereniging verder nog hebben is, dat ze voor elke actie op de website net iets meer downloadtijd verdienen dan deelnemers die geen lid zijn van de vereniging.
WisBase.nl bestaat door leraren die hun materiaal willen delen met collega's.
Word nu WisBase-leraar en deel mee.

Bronnen

[1] Bram Theune (2001): *WisBase met toetsen online: een product van deze tijd*. In: *Euclides* 77(3): pp. 88-91.

[2] Bram Theune (2010): *WisBase*. In: *Euclides* 85(4); pp. 149-152.

[3] Mededeling / WisBase.nl – een toetsenbank. In: *Euclides* 87(2), 2011; pag. 67.

Websites

- *www.wisbase.nl*
- *www.ctwo.nl*
- *www.drijvers-it.com*
- *http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/nl/*

Over de auteur

Erik van den Hout is sinds 1 oktober 2010 voorzitter van de stichting WisBase. Daarnaast is hij leraar wiskunde, leraar informatica en ICT-coördinator op Scholengemeenschap Sint Ursula in Horn.
E-mailadres: *evdhout@wisbase.nl*

Negatieve getallen

[Frans Ballering en Nafees Rehman]

Hoe is het toch mogelijk dat een leerling na een les uitleg over de regels die hij een jaar geleden heeft leren kennen, bij –4 – 6 = … antwoordt: +10 ??

Nafees geeft een herhalingsles over negatieve getallen aan leerlingen van klas 2. Hij geeft deze klas een uur per week rekenen. Wiskunde krijgen ze van een andere docent.
De les gaat ongeveer als volgt.
Hij vraagt aan de leerlingen waar ze aan denken als hij zegt: 'Negatieve getallen?'
Er komt op die manier een schema op het bord met woorden die allemaal met negatieve getallen te maken hebben. En als de leraar daarin iets belangrijks mist, brengt hij dat ter sprake.
Er komt een koffiebekertje tevoorschijn waarin rode en blauwe papiertjes zitten en Nafees vertelt het verhaal van de heks die een ketel heeft met een temperatuur van 0 graden (***zie figuur 1***). Dat is de koffiebeker.
Als ze in de ketel een rood blokje gooit, dan stijgt de temperatuur met één graad; gooit ze er een blauw blokje in dan daalt de temperatuur één graad.
0 erbij + 2 d.w.z. 0 **+** +2 = +2 . Dat vinden ze niet moeilijk. Dus:
+ + = +
0 erbij – 2 d.w.z. 0 **+** –2 = –2 . Met de blokjes gaat dat erin als koek. Dus:
+ – = –
Hetzelfde geldt voor de varianten hierop.
Dus:
– + = –
– – = –
De leerlingen maken enkele opgaven en dat levert niet veel problemen op.
Daarna komt het vermenigvuldigen, en ook hier komt na elke vermenigvuldiging de regel op het bord:
+ × + = +
+ × – = –
– × + = –
– × – = +
Hierbij komt de heks nog een enkele keer ter sprake.
Ook nu weer maken de leerlingen enkele opgaven. Niet veel problemen.
En dan komt –6 – 4 = +10 …
Tot zover de les.

Door de ogen van de leerling

Er verschijnen negatieve getallen. Nou daar is hij niet bang van, want in groep 3 en 4 bedenken kinderen al dat 4 – 3 wel kan en 3 – 4 niet. Maar je kunt best zeggen dat 3 – 4 als uitkomst heeft: '1 tekort' en er zijn altijd kinderen die van broer, zus of ouder hebben gehoord dat je daar 'min 1' tegen zegt. Schrikken ze ook niet van.
Maar er verschijnen wel rare sommen op het bord:
+2 **+** +3 = …
+2 **+** –4 = …
Waarom verschijnen er nu ineens twee plussen?
O, gelukkig, + + = +. Opluchting.
Hier wordt niet gedacht maar opgelucht.
Waarom die rare ++ en +– en zo? Dat komt doordat we, nu we negatieve getallen kennen, die andere, gewone getallen een plus erbij geven. Als je probeert met zulke getallen te rekenen, dan ontstaan er sommen zoals hierboven.

Eigen producties [1]

Mogelijke activiteit op dit moment van het leerproces:
We hebben dus getallen zoals: –7, +6, +3, –2, –1, –12, +25, –13, +4, –4, +2, –5.
Maak met deze getallen optelsommen.
Zoveel mogelijk verschillende. Uitrekenen doen we straks.
Maak met deze getallen aftreksommen.
Uitrekenen doen we straks.

Wiskunde

Op dit moment is er een mooie gelegenheid om een karakteristiek van wiskunde toe te lichten. Namelijk: we bedenken nieuwe getallen en de wiskundeleraar vraagt zich af: Kun je met deze nieuwe getallen ook optellen en aftrekken, en kan dat ook met de oude en de nieuwe door elkaar? En hoe moet dat dan?
Een dergelijk verhaal kan in de schoolloopbaan van een kind meerdere keren terugkomen. Bij machten al. We snappen wat 3^7 betekent, maar kan ik ook iets bedenken bij 3^0 en 3^{-2} ? Bij wortels: weer die vraag of je ermee kunt rekenen.

De heks

Als de leerlingen zich realiseren dat zulke sommen niet raar zijn, zijn ze toe aan het hoe en dan kan de heks ter sprake komen. Ik vind zelfs dat de heks ter sprake móet komen, omdat het een elegant, overtuigend en probleemloos *denkmodel* is voor het beantwoorden van de sommen (die de leerlingen kortgeleden zelf hebben bedacht). Maar dan moet de leerling leren om bij *elke* som een heksenverhaal te vertellen en daaruit het antwoord af te leiden. Regels bedenken ze dan zelf wel, maar bij elke fout dient de heks weer ten tonele te verschijnen. Uiteindelijk leert de leerling dan: regels kunnen handig zijn, maar denken doe ik met de heks.
Breng je vervolgens –6 – 4 ter sprake dan



figuur 1 Bron: WisWeb, Lessenserie Negatieve getallen (Freudenthal Instituut)

past deze opgave dus niet in het bovenstaande patroon en moet (aanvankelijk) daarin worden omgezet. En dan komt de heks weer. Vier warme blokjes eruit betekent de temperatuur daalt en wordt –10. En er moet dus aandacht worden besteed aan het feit dat er niet alleen opgaven als –3 + –7 bestaan maar ook hoe er soms, onverwacht ook sprake kan zijn van –3 – 7.
Alternatieven zoals het voortzetten van rijtjes, hebben het nadeel dat ze wel regels verklaren, maar geen denkwerk bevorderen. Het zijn eerder een soort bewijzen. Of moeten we leerlingen leren om zelf zulke rijtjes te bedenken als ze een fout maken?

Plussen en minnen

Waarom –6 – 4 en niet altijd –6 **+** –4 of –6 **–** +4? Tja, we zijn toch gewend om van een getal er 4 af te trekken. En als er (later) met variabelen wordt gewerkt en je vult in –6 – *a* voor *a* het getal 4 in komt er –6 – 4 te staan.
Hoe zit het dan? Wordt het – 6 **–** +4 of –6 **+** –4? Vertalen we deze beide opgaven in een heksenverhaal dan blijkt het verschil te worden uitgedrukt in: koude blokjes erbij of warme blokjes eruit en ook voor de leerlingen is vanzelfsprekend dat dat niet uit maakt.

Vermenigvuldigen

Bij vermenigvuldigen komt de heks opnieuw ter sprake, nu met een grote lepel waarop steeds hetzelfde aantal blokjes past. Ook hier kan weer worden begonnen met het zelf bedenken van opgaven met zowel positieve als negatieve getallen.
Wat is een heksenverhaal bij +3 × +7, bij +3 × –7, bij –3 × +7 en bij –3 × –7?
De strenge wiskundigen onder ons zullen hierbij problemen hebben met de interpretatie van de eerste tekens die, zonder toelichting worden beschouwd als: ‘erbij’ of ‘eraf’. Leerlingen zijn in dit stadium van het leerproces nog lang niet toe aan dit soort beschouwingen. Als ik consequent zou willen zijn, zou ik moeten denken aan + +3 × –7 of liever nog aan opgaven als –5 **+** +3 × –7. Ik moet er niet aan denken!

Delen

Bij delen hebben we van de heks geen gemak meer. Delen moet hier echt worden bekeken als het omgekeerde (inverse) van vermenigvuldigen. Ook hier kunnen we vanuit ons wiskundehart spreken. Delen is het omgekeerde van vermenigvuldigen, optellen van aftrekken, worteltrekken van kwadrateren (en later logaritme nemen van machtsverheffen, naast de wortels). Als we goed redeneren blijven de regels die we al eerder leerden hetzelfde!

De heks is voor de leerlingen heel concreet, omdat ze er goed mee kunnen redeneren. De regels zijn abstract en werken pas goed als je voldoende ervaring en oefening hebt met het werken met deze nieuwe getallen. Leerlingen willen graag regels. Dat is logisch, wiskunde is toch een wetenschap van patronen; overeenkomsten zien is nu eenmaal een sterke eigenschap van de mens. Maar als we daarbij het denken uitschakelen, gaat het vaak mis. Alleen als je er goed bij nadenkt, zijn regels handig.

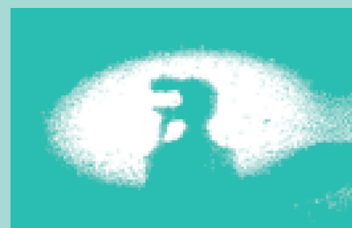
Noot

[1] Met eigen producties worden open opdrachten bedoeld waar leerlingen zelf opgaven en/of manieren van oplossen bedenken.

Over de auteurs

Frans Ballering heeft zes jaar gewerkt als wiskundeleraar op mavo, havo en vwo en daarna dertig jaar op de tweedegraads lerarenopleiding. Hij is nog niet uitgedacht over het leren van wiskunde door kinderen, mede door zoveel enthousiasme van wiskundeleraren die het kunnen opbrengen om ’s avonds ook nog lessen vakdidactiek bij te wonen. Sinds 1 september 2010 is hij met pensioen (fpu).
E-mailadres: *fransballering@hetnet.nl*
Nafees Rehman is wiskundeleraar aan het Edith Steincollege in Den Haag en bijna afgestudeerd aan de tweedegraads lerarenopleiding van de Hogeschool Rotterdam.
E-mailadres: *n.rehman@esloo.nl*

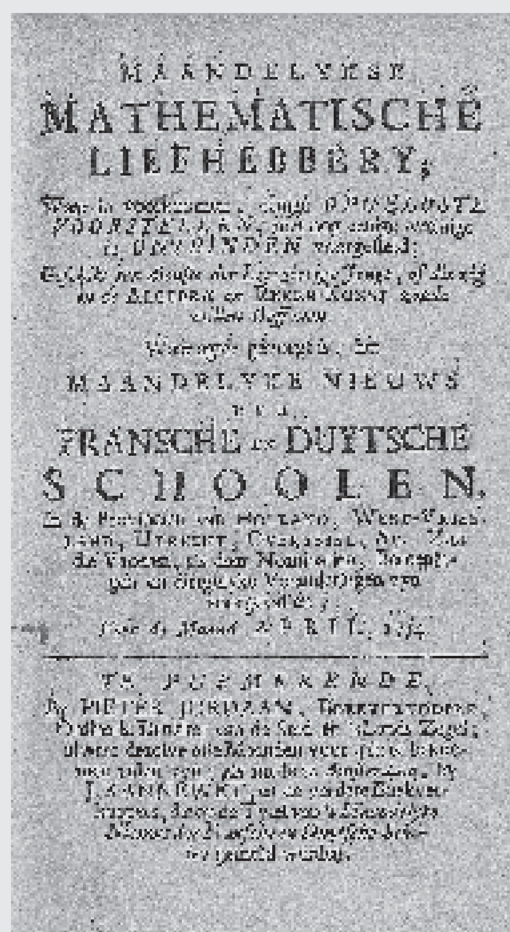
Getuigen



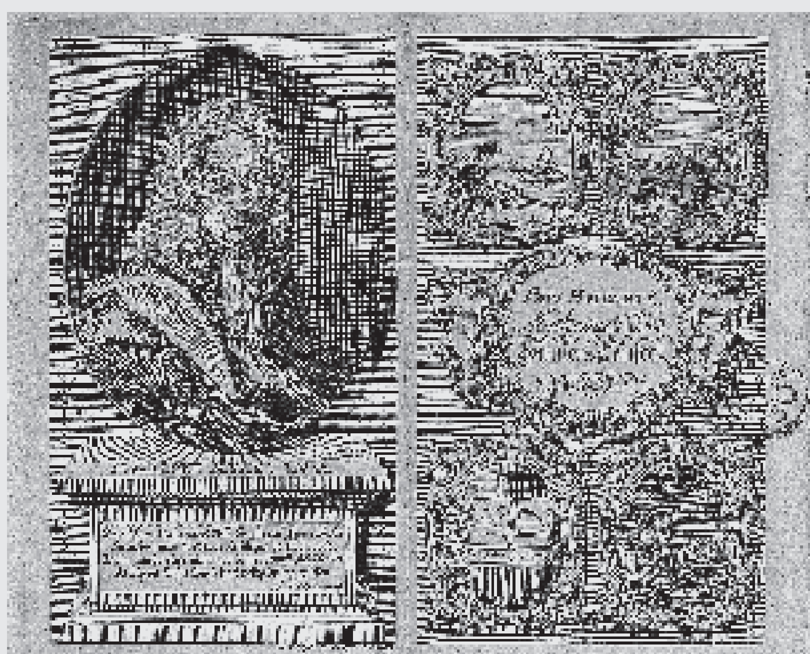
[Danny Beckers]

Wiskundeonderwijs bestaat al eeuwen. Niet op dezelfde manier, niet met dezelfde doelen, en niet met hetzelfde idee achter het nut van dat onderwijs, maar op een bepaalde manier heeft het bestaan. Biografieën, aantekeningen, artefacten, films en boeken getuigen van dat onderwijs.
In de serie 'Getuigen' behandelt Danny Beckers dergelijke historische snippers, en plaatst hun betekenis in de context van die tijd.

Als wiskundeleraar zijn we tegenwoordig zo gewend dat er geregeld een nummer van *Euclides* op de mat valt, dat we ons nauwelijks anders kunnen voorstellen of er wordt geregeld een nieuw tijdschrift-nummer bezorgd. Ook vóór *Euclides* waren er tijdschriften voor wiskundeleraren. Tussen april 1754 en december 1769 verscheen bijvoorbeeld de *Maandelykse Mathematische Liefhebbery*; ***zie figuur 1***. Het was een tijdschrift waarop je kon intekenen. Dat betekende dat je een contract met een boekverkoper aanging dat je maandelijks een exemplaar zou afnemen indien dat verscheen. Dergelijke contracten waren (en bleven nog geruime tijd) gebruikelijk. Het bood bescherming aan de koper, die op die manier alleen betaalde voor tijdschriften die hij ook daadwerkelijk kreeg – er gingen nogal eens initiatieven van dit soort failliet. Daarnaast bood het ook bescherming aan de uitgever, die meestal pas begon met drukken van een tijdschrift op het moment dat hij voldoende intekenaren had.
Het initiatief voor dit tijdschrift kwam uit een groepje Hollandse 'liefhebbers van


MAANDELYKSE
MATHEMATISCHE
LIEFHEBBERY;
...
MAANDELYKE NIEUWS
...
FRANSCHE en DUITSCHE
SCHOOLEN.
...
TE PURMERENDE,
By PIETER JORDAAN, ...

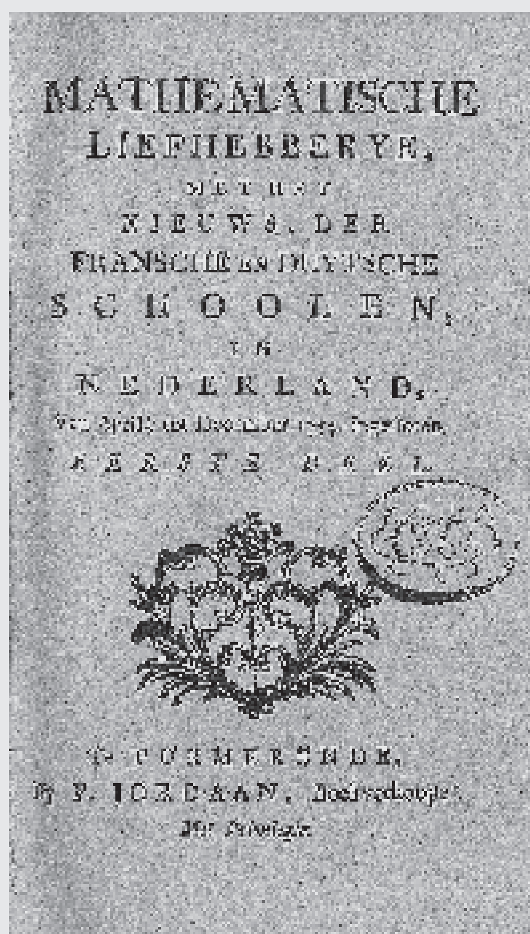
figuur 1 Titelblad van het eerste nummer van de 'Maandelijkse Mathematische Liefhebbery' (Bron: Bijzondere Collecties, Universiteit van Amsterdam)



figuur 2 Frontispice (met portret) van Paul Halcke's 'Mathematisches Sinnenconfekt' (1612), een boek dat door Oostwoud in het Nederlands werd vertaald (Bron: Universiteit van Amsterdam)

de mathematische konsten’. Dit groepje bestond uit rijke kooplieden, notabelen en (succesvolle) rekenmeesters. Vermoedelijk kwam deze groep op informele wijze geregeld bijeen om samen wiskunde te doen. In elk geval was het Pieter Karman, voormalig burgemeester van De Rijp, die als eerste suggereerde dat een tijdschrift niet onwelkom was. Hij had contact met uitgever/boekverkoper Pieter Jordaan te Purmerend die zou helpen het tijdschrift te verkopen. Via een netwerk van uitgevers, onder andere in Amsterdam, werd het tijdschrift aan de man gebracht. De redactie kwam voor rekening van Jacob Oostwoud (1714-1784). Oostwoud was een zoon van een onderwijzer uit Hem. Hij beheerde een kostschool te Oostzaandam (tegenwoordig Zaandam) en was een van de liefhebbers uit de kring rond Karman. Oostwoud was lid van het Hamburgs wiskundig genootschap, en zou ook een aantal boeken van zijn Hamburgse vrienden in het Nederlands vertalen (***zie figuur 2***).

Het tijdschrift bestond uit drie gedeelten. Het eerste deel, de *Liefhebbery*, bevatte overwegend vraagstukken die werden opgegeven om door de lezers te worden opgelost. De vraagstukken waren deels eerder verschenen in bekende reken- en wiskunde(les)boeken uit die tijd. Oostwoud en Karman putten duidelijk ook inspiratie uit het succes van opgavencollecties zoals die door het Hamburgse genootschap werden gepubliceerd. Wellicht waren zij ook bekend met *The Ladies’ Diary*, waarin eveneens wiskundig ‘vermaak’ werd geboden, in dit geval gecombineerd met informatie die van nut kon zijn voor Britse dames van goede huize. De meeste opgaven waren rekenkundig, algebraïsch of meetkundig van aard; een enkele keer kwamen meer exotische onderwerpen aan bod zoals tovervierkanten (een hobby van


MATHEMATISCHE
LIEFHEBBERYE,
MET HET
NIEUWS, DER
FRANSCHE en DUYTSCHE
SCHOOLEN,
IN
NEDERLAND,
EERSTE DEEL.
TE PURMERENDE,
By P. JORDAAN, Boekverkooper,
Met Privilegie.

figuur 3 Titelblad van de eerste jaargang van Oostwoud’s tijdschrift ‘Mathematische Liefhebberye’ (Bron: Bijzondere Collecties, Universiteit van Amsterdam)

Karman), logische raadsels, of variatierekening.
Het tweede gedeelte bevatte hoofdzakelijk uitwerkingen van eerder verschenen opgaven. Daarnaast verschenen hierin korte verhandelingen, meestal opmerkingen over bepaalde oplossingen in een eerder nummer, of wiskundige onderdelen uit een recentelijk afgenomen schoolmeesters-examen. Ook verschenen er verhandelingen in briefvorm over zeevaartkundige en astronomische onderwerpen, waaronder een aantal van de vader van Oostwoud en brieven uit de nalatenschap van Dirk Rembrandtszoon van Nierop, een coryfee onder de rekenmeesters.
Het derde gedeelte was getiteld *Nieuws van de Franse en Duytsche scholen*, waarin lijsten van schoolhouders werden afgedrukt, vacante plaatsen, necrologieën en grafredes van schoolmeesters, lofdichten en examens die bij schoolmeesters werden afgenomen. De vraagstukken waren veeleer elementair van aard, en bedoeld voor de schoolmeesters om hun verstand aan te scherpen en af en toe iets nieuws te leren. Ze werden ingekleed met gezochte – soms scabreuze – verhaaltjes en gedichten om het geheel een minder droge aanblik te geven. In nummer 5 van jaargang 9 (mei 1761, p. 228, liefhebberij-deel) schreef een collega en vriend van Oostwoud bijvoorbeeld een lofdicht op de recent overleden vrouw van de redacteur. In het gedicht zat een vraagstuk verwerkt dat neerkwam op een derdegraads vergelijking die moet worden opgelost om te kunnen bepalen hoe lang de dierbare overledene met Oostwoud getrouwd was geweest.

De afleveringen van de *Liefhebberye* verschenen ononderbroken. Iedere aflevering bevatte drie katernen, waarbij het eerste katern (de ‘liefhebberij’) afzonderlijk genummerd was ten opzichte van het tweede en derde (beantwoordde vraagstukken en het schoolnieuws). Dit bood de intekenaar de mogelijkheid om een jaargang van de ‘Liefhebberij’ afzonderlijk in te binden, en de uitgewerkte vraagstukken en het schoolnieuws als afzonderlijk boekdeel te laten binden, of niet te bewaren. Afzonderlijke titelbladen werden desgewenst bijgeleverd; ***zie figuur 3*** op pag. 245. Het betekende voor de koper dat hij de boeken in de stijl van zijn eigen bibliotheek kon laten maken.
Voor ons vandaag de dag betekent het dat er bijna geen twee gelijke exemplaren van het tijdschrift te vinden zijn, en dat het puzzelen is om te achterhalen hoe de intekenaren indertijd de nummers ontvingen.

Gedurende de eerste 13 jaargangen bleef Oostwoud de redacteur van de *Mathematische Liefhebbery*. In het januarinummer van jaargang 13 (1765) plaatste hij een voorwoord waaruit bleek dat het werk hem boven het hoofd begon te groeien. Hij vroeg zijn correspondenten om toch vooral alle werk duidelijk aan te leveren, en het papier slechts aan één kant te beschrijven, zodat hij kon volstaan met knippen en plakken. Nummer 6/7 (juni/juli 1765) verscheen als één nummer en vanaf nummer 8 stond de naam van Louis Schut op het titelblad. Schut plaatste in dat nummer een voorrede, waarin hij zich verontschuldigde voor het late verschijnen van dit nummer, dat het septembernummer snel zal volgen, en dat hij de rol van Oostwoud, die inmiddels ‘teveel drukte heeft met zijn andere taken’, naar beste eer en geweten zou proberen te vervullen. Schut was een collega van Oostwoud te Monnickendam.

De *Liefhebbery* was uniek in de zin dat het gedragen werd door een gemeenschap van onderwijzers (in spé) en zodoende ook onderwijsnieuws combineerde met de wiskundige frivoliteiten. Het tijdschrift kent geen Nederlandse voorlopers, dus het mag als eerste Nederlandse tijdschrift voor rekenmeesters de geschiedenis in gaan. Dat het aan een vraag voldeed, werd ook duidelijk, omdat het, na de beëindiging van het project, direct navolging vond in de *Oeffenschool der mathematische wetenschappen* (1770-1771) en diverse genootschapstijdschriften.

Er zijn na 1769 sowieso maar weinig jaren geweest waarin er in Nederland geen tijdschrift voor wiskundeonderwijzers verscheen; maar het zal voor de liefhebbers soms wel zoeken zijn geweest waar ze zich konden intekenen. Wat dat betreft zijn we er met *Euclides* op vooruit gegaan!

Over de auteur
Danny Beckers is voormalig wiskundedocent, consultant/ontwikkelaar passend onderwijs en universitair docent wetenschapsgeschiedenis aan de Vrije Universiteit Amsterdam. In die laatste hoedanigheid ligt zijn interesse vooral bij de geschiedenis van het wiskundeonderwijs.
E-mailadres: *d.j.beckers@vu.nl*

Uitdagende problemen

KISSING CIRCLES

[Jacques Jansen]

In deze aflevering van de rubriek 'Uitdagende problemen' een probleem van rakende cirkels. Jacques Jansen beschrijft hoe zijn leerlingen bij wiskunde-D enthousiast aan de slag zijn gegaan met dit probleem. Met inzet van het programma Geogebra werden een paar vermoedens geuit en weerlegd, waarna de leerlingen via een benadering tot een exacte berekening van de oplossing van het probleem kwamen. Daarnaast vindt u in dit artikel ook nog een gedicht van Sir Frederick Soddy over kussende cirkels en een (docenten)oplossing van het raakprobleem met behulp van inversie (spiegelen aan een cirkel).

Plotseling voelde ik een warme hand in mijn nek. Ik werd in mijn kraag gegrepen door wiskundecollega Henri [1] tijdens de pauze in de personeelskamer. Hij schotelde mij een probleem voor dat door de leerlingen genoemd werd: 'het probleem dat mijnheer Snijders niet opgelost kreeg'. Ik herkende zelf het probleem niet meteen, maar nadat mijn 5-vwo leerlingen met wiskunde-D het opgelost hadden, stuurde ik het resultaat door naar de kerngroep wiskunde-D van de TU/e. Ik kreeg te horen dat het probleem van mijn collega Henri een bijzonder geval is van de 'Kissing Circles', een (deel van het) raakprobleem van Apollonius van Perga, een Grieks meetkundige die leefde ongeveer in de periode 262-190 v. Chr.
Het probleem van Apollonius van Perga: Construeer cirkels die raken aan drie gegeven cirkels; *zie figuur 1* op pag. 248.

Het probleem dat mijn collega Henri mij voorschotelde, was een speciaal geval, waarbij de middelpunten van de gegeven cirkels een (3-4-5)-driehoek vormden. Nadat ik het probleem vernomen had, ben ik met mijn wiskunde-D leerlingen onmiddellijk aan de slag gegaan. Ik liet de recente leerstof even liggen en maakte de leerlingen enthousiast om met behulp van Geogebra [2] het probleem op te lossen. De leerlingen werkten hieraan in tweetallen en maakten er een werkstuk van.
Ik gebruik hieronder de tekst en uitwerkingen van leerling Dorianne uit haar werkstuk.

Het raakprobleem

Je hebt een rechthoekige driehoek met zijde 3, 4 en 5 lang.
Elk punt van de driehoek neem je als het middelpunt van een cirkel.
Zo teken je een cirkel met straal 1, 2 en 3.
*In het oppervlak tussen de drie cirkels in kun je een cirkel maken die de andere cirkels precies raakt. De onderzoeksvraag is nu: wat zijn de coördinaten van het middelpunt en wat is de straal van de cirkel die deze drie cirkels raakt? **In figuur 2** wordt de situatie verduidelijkt.*

De leerlingen hadden als eerste opdracht om vermoedens te formuleren over de rakende vierde cirkel en met Geogebra na te gaan of hun vermoedens klopten. Dorianne bedacht twee vermoedens.

Vermoeden 1 – *Als je van elk raakpunt een lijn trekt naar het tegenoverliggende hoekpunt, krijg je drie lijnen. Deze lijnen snijden elkaar in één punt. Mijn vermoeden is dat dit punt het middelpunt van de cirkel, dat we zoeken, is. Ik heb van deze situatie een plaatje gemaakt in Geogebra (**zie figuur 3**). Dit plaatje laat zien dat dit vermoeden onjuist is. Punt G is niet het midden van een cirkel die de drie andere cirkels raakt.*

Vermoeden 2 – *Verbind alle raakpunten met elkaar. Zo krijg je een nieuwe driehoek DEF. Als je van elk hoekpunt een lijn trekt naar het midden van de tegenoverliggende zijde, krijg je weer drie lijnen. Deze drie lijnen snijden elkaar in één punt. Mijn vermoeden is dat dit punt het middelpunt van de cirkel is die we zoeken. Ook van dit vermoeden heb ik een plaatje gemaakt in Geogebra (**zie figuur 4**). Helaas blijkt ook dit vermoeden onjuist te zijn. De cirkel die ik heb gevonden raakt niet de drie andere cirkels.*

Voordat we naar de berekeningen gaan, even een stukje poëzie met vertaling.

Wiskundepoëzie

Een gedicht over 'kissing circles' van Frederick Soddy.



Frederick Soddy (2 september 1877-22 september 1956) was een Engelse radiochemicus, die in 1921 de Nobelprijs voor de scheikunde ontving. Hij heeft zich onder andere ook beziggehouden met bijzondere wiskundige vraagstukken; zo ook dus zijn herontdekking in 1936 van de *Cirkelstelling van Descartes* [3], die hij met een gedicht aankondigde in het tijdschrift **Nature (1936, in nr. 137)**.

The Kiss Precise
For pairs of lips to kiss maybe
Involves no trigonometry.
'Tis not so when four circles kiss
Each one the other three.
To bring this off the four must be
As three in one or one in three.
If one in three, beyond a doubt
Each gets three kisses from without.
If three in one, then is that one
Thrice kissed internally.

Four circles to the kissing come.
The smaller are the benter.
The bend is just the inverse of
The distance from the center.
Though their intrigue left Euclid dumb
There's now no need for rule of thumb.
Since zero bend's a dead straight line
And concave bends have minus sign,
The sum of the squares of all four bends
Is half the square of their sum.

figuur 1

figuur 2

figuur 3

Vertaling [4]
twee paar lippen kunnen kussen
zonder trigonometrie ertussen.
anders is het als vier cirkels het doen
elk een de andere drie.
om dit klaar te spelen moeten de vier
zijn als drie in een of een in drie.
bij een in drie, krijgt zonder twijfel
elk drie kussen van buitenaf.
bij drie in een, dan wordt die ene
drie keer gekust van binnen.

vier cirkels komen naar het kusfestijn
de kleinere zijn het meest gespannen
de kromming is omgekeerd evenredig met
de afstand van het middelpunt.
hoewel hun samenspel Euclides deed
verstommen
weten wij dat tegenwoordig wel precies.
daar nul kromming is een rechte lijn
en concave bogen een minnetje krijgen
is de som van de kwadraten van alle vier de
bogen
de helft van het kwadraat van de som.

Benadering met gebruik van een schuifparameter

De leerlingen kregen vervolgens de opdracht om de coördinaten van het middelpunt te berekenen. Gevraagd werd zowel naar een benadering met behulp van Geogebra als naar een exact antwoord. Hieronder weer de uitwerking van Dorianne van deze opdracht.
Als we het middelpunt van de gezochte cirkel M(a, b) noemen en de straal r, dan kun je de volgende drie vergelijkingen opstellen. Dit heb ik met behulp van stelling van Pythagoras gedaan.
$a^2 + b^2 = (1 + r)^2$
$(3 - a)^2 + b^2 = (2 + r)^2$
$a^2 + (4 - b)^2 = (3 + r)^2$
Dorianne gebruikte vervolgens de eerste twee vergelijkingen om a uit te drukken in r. Dat vulde ze weer in, in de derde vergelijking om ook b uit te drukken. Zo kwam ze op:
$a = 1 - ⅓r$ en $b = 1 - ½r$
Deze uitdrukkingen gebruikte ze om met behulp van Geogebra een benadering te vinden voor de straal r, als volgt:
De standaardvergelijking voor een cirkel:
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$
Nu vul ik voor a en b de gevonden waarden in. Zo ontstaat deze vergelijking:
$(x - 1 + ⅓r)^2 + (y - 1 + ½r)^2 = r^2$
Wanneer je deze vergelijking invoert in Geogebra met een schuifbalk voor de verschillende waarden die r kan aannemen, krijg je het plaatje ***in figuur 5****. De beste benadering voor de waarde van r is* 0,26.

Exacte berekening

Dorianne maakte ook een exacte berekening, door de gevonden uitdrukkingen voor a en b in te vullen in de eerste Pythagoras-vergelijking $a^2 + b^2 = (1 + r)^2$ die ze gevonden had. Dat geeft een kwadratische vergelijking in r namelijk:
$(1 - ⅓r)^2 + (1 - ½r)^2 = (1 + r)^2$
Na uitwerken vond Dorianne:
$r = \frac{6}{23}$ of $r = -6$.

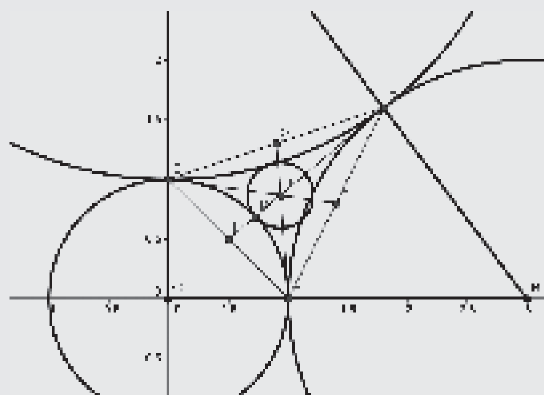
Negatieve waarden voor r hebben geen betekenis in dit probleem. Dus alleen de uitkomst $r = \frac{6}{23}$ *geldt.*
De bijbehorende waarden voor a en b zijn:
$a = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{23} = \frac{21}{23}$
$b = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{23} = \frac{20}{23}$
De coördinaten van het middelpunt M(a, b) zijn dus: $\left(\frac{21}{23}, \frac{20}{23}\right)$.

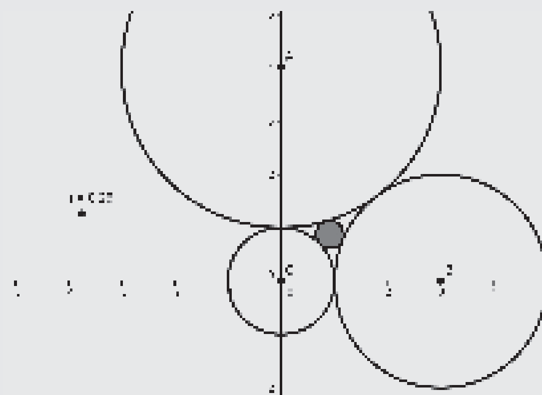
In haar terugblik meldde Dorianne nog:
Bij mijn eerste twee vermoedens heb ik veel gebruik gemaakt van constructies in Geogebra. Het was een zeer handig hulpmiddel. Uiteindelijk bleek dat het probleem toch met algebra was op te lossen.
Ik vond het een superleuk probleem om op te lossen en heb er met plezier aan gewerkt!

Docentenoplossing

Tot slot een mogelijke docentenoplossing: het tekenen van de gezochte cirkel met behulp van inversie.
Iedereen kent de transformatie spiegelen aan een lijn. Spiegelen aan een cirkel, ook wel *inversie* genoemd, is minder bekend.

figuur 6 Trek de halflijn OP. Richt op deze halflijn in het punt P een loodlijn. Noem het snijpunt van loodlijn met de cirkel R. Snijd de raaklijn in R met de halflijn OP. Het snijpunt is het spiegelbeeld Q van P. Met behulp van gelijkvormigheid van driehoeken is het spiegelvoorschrift af te leiden.


figuur 4

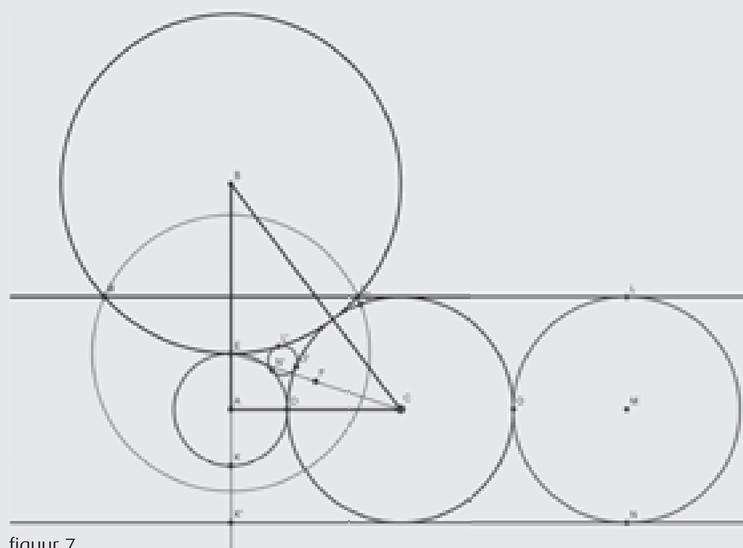

figuur 5

Het nut hiervan is dat vaak problemen met cirkels behoorlijk vereenvoudigd kunnen worden. Het komt er op neer de inversiecirkel op een verstandige manier te kiezen. Het spiegelvoorschrift luidt bij een cirkel met middelpunt O en straal r :
$OP \cdot OQ = r^2$
waarbij P ($\neq O$) een willekeurig punt is en Q het spiegelpunt (*inverse punt*) van P.
In figuur 6 is afgebeeld de constructie van het spiegelpunt Q van punt P. Overigens 'inversie' is te vinden in het afbeeldingenmenu van Geogebra.
Er zijn een paar belangrijke eigenschappen van inversie waarvan we gebruik maken:

- Rechte lijnen door O worden op zich zelf afgebeeld.
- Rechte lijnen die niet door O gaan, worden in cirkels getransformeerd.
- Cirkels door O gaan over in rechte lijnen.
- Cirkels die de inversiecirkel loodrecht snijden, zijn invariant.

In figuur 7 staat de constructie van de gezochte cirkel met Geogebra. Er zijn meer oplossingen. Het middelpunt van de inversiecirkel is handig gekozen: het raakpunt van twee cirkels (punt E); voorts snijdt de inversiecirkel de derde cirkel loodrecht.
De eerste twee cirkels worden getransformeerd in twee evenwijdige rechte lijnen en de derde cirkel is onder deze inversie invariant. Dat laatste mag u even nagaan (bewijs?). Het is verder aan de lezer om dit plaatje te analyseren.

Collega Henri heeft achteraf bij mijn leerlingen iets mooi te weeg gebracht. Ik denk er met genoegen aan terug.
Geïnteresseerd geraakt in raakproblemen? Verschillende raakproblemen zijn terug te vinden in oude Wiskunde Olympiades, vooral in de finales.


figuur 7

Noten

[1] Collega Henri Snijders is in augustus 2012 overleden. Hij was inspirerend voor mij.
[2] Het programma Geogebra is gratis en werkt op elke computer. Het combineert meetkunde en algebra met een interactief rekenblad. Zie: *www.geogebra.org/cms/nl*
[3] Zie bijvoorbeeld: *www.pandd.demon.nl/soddy.htm#3*
[4] Nederlandse vertaling van oud-docent Engels drs. H. Heinen.

Over de auteur

Jacques Jansen was 35 jaar docent wiskunde aan het Strabrecht College te Geldrop. Hij is sinds 1 september 2012 met fpu.
E-mailadres: *jacques.jansen@wxs.nl*

De stelling van Pythagoras voor de brugklas en groep 8

DEEL 2, PRAKTIJKERVARINGEN EN EEN BIJBEHOREND BEWIJS

[Yvonne Killian]

In Euclides 81(7), mei 2006, beschreef Yvonne Killian hoe je een brugklas of groep 8 kunt laten kennismaken met de stelling van Pythagoras, zonder letterrekenen, machten of wortels. In dit artikel presenteert ze een bijbehorend bewijs voor deze doelgroepen en vertelt ze over haar ervaringen in de praktijk.

Aanpak (samenvatting van het vorige artikel)

In mijn *Euclides*-artikel van 2006 [1] heb ik laten zien hoe de stelling van Pythagoras ook prima te doen is in de brugklas of in groep 8: ik presenteer hem als een aanvulling op de formules voor omtrek en oppervlakte. Aan een rechthoek op het bord, met lengte *l* en breedte *b*, voeg ik diagonaal *d* toe en onder de twee andere formules zet ik de derde, 'Pythagoras'; ***zie figuur 1*** (bron: [1]).
Daarna doe ik voor hoe je de bijbehorende sommen noteert en hoe je ze oplost: eerst de formule onder de som schrijven, dan de gegevens invullen en tot slot een beetje puzzelen.
De leerlingen laat ik allebei de rechthoeken

Opgave (1): l = 4 cm, b = 3 cm, d = ? cm
l x l + b x b = d x d
4 x 4 + 3 x 3 = ? x ?
→ 16 + 9 = ? x ? → ? x ? = 25 → ? = 5
→ d = 5 cm

Opgave (2): b = 5 cm, d = 13 cm, l = ? cm
l x l + b x b = d x d
? x ? + 5 x 5 = 13 x 13
→ ? x ? + 25 = 169 → ? x ? = 144
→ ? = 12 → l = 12 cm

tekenen en ik laat ze de uitkomsten controleren door de diagonalen na te meten. Dan geef ik ze, om zelf te doen:
Ik complimenteer de leerlingen die de

Opgave (3): l = 8 cm, d = 10 cm, b = ? cm

uitkomst direct zien, en dan komen er sommen die op het eerste gezicht 'niet kunnen'. Ik schrijf op het bord:

Opgave (4): b = 3 cm, d = 4 cm, l = ? cm
l x l + b x b = d x d
? x ? + 3 x 3 = 4 x 4
→ ? x ? + 9 = 16 → ? x ? = 7 → ? = ...

Welk getal is 'keer zichzelf' gelijk aan 7? Ik laat op een grote rekenmachine het 'Pythagoras-knopje' zien, en de werking ervan. Ook bespreek ik het ongeveertekentje, ≈.
De laatste regel van de opgave, op het bord, wordt nu:
Ik deel rekenmachientjes uit en geef ze nog

→ ? x ? + 9 = 16 → ? x ? = 7 → ? ≈ 2,65
→ l ≈ 2,65 cm

twee sommen:
Tot slot meld ik dat veel Pythagoras-

Opgave (5): l = 2 cm, b = 1 cm, d = ? cm

Opgave (6): een vierkant met l = 1 cm, d = ? cm

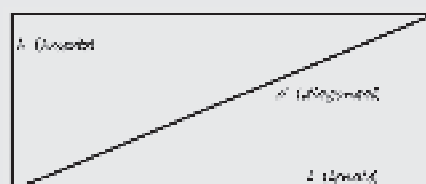
opgaven over een halve rechthoek gaan en dat je de ontbrekende helft (aan de andere kant van de diagonaal) er dan zelf bij kunt tekenen of denken.

Ervaringen met groep 8 en op het vwo

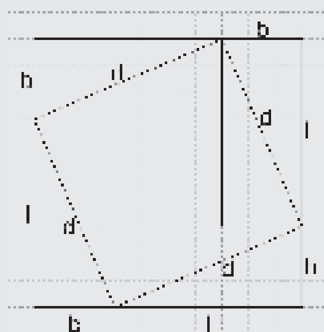
De aanpak werkt goed bij achtste groepers. Op de open dag vinden ze het leuk en niet moeilijk. In de eerste en de tweede klas wordt er, in september, maar één les aan besteed, maar in het proefwerk weet toch praktisch iedereen de gebruikte formule en de uitwerking te reproduceren en worden er maar weinig fouten gemaakt. De paar leerlingen die (wellicht hiertoe aangespoord door een behulpzaam familielid) toch kwadraten en worteltekens gebruiken, maken wel veel fouten, maar dat is geen verrassing; om die reden was ik het immers op deze manier gaan doen.

Kritiek

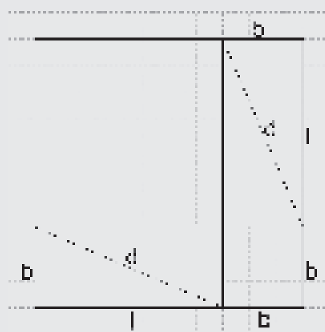
Terug naar het artikel. Naast positieve reacties, kreeg ik destijds ook kritiek, zoals: Waar was het bijbehorende bewijs? Daar had ik toen niet over nagedacht, want de enige vraag die ik mezelf gesteld had, was: Hoe zorg ik dat er niet zoveel fouten worden gemaakt? En daar kwam een antwoord uit dat toevallig ook geschikt was voor brugklassers.
Maar het zat me toch niet helemaal lekker dat ik geen bewijs bij mijn verhaal had. Dus toen er voor dit schooljaar opnieuw vwo-brugklassen in mijn rooster stonden, ben ik er toch maar eens voor gaan zitten. Het resultaat vindt u hieronder, in een lesverslag. Het bewijs zelf is niet nieuw,



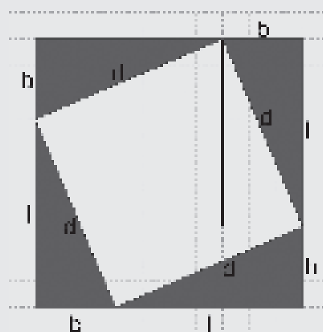
figuur 1



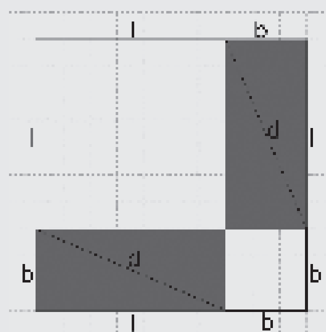
figuur 2



figuur 3



figuur 4a



figuur 4b

maar ik denk dat de vorm en de notatie – opnieuw zonder wortels, kwadraten of letterrekenen – wel nieuw zijn.

Het bewijs

Nodig: ruitjespapier, potlood en liniaal.
Wat gaan we doen?
We gaan bewijzen dat in elke rechthoek geldt (de stelling van Pythagoras):
$l \times l + b \times b = d \times d$

Stap 1 – een rechthoek
Ik teken op het bord, bovenaan, een rechthoek, klein genoeg om ruimte over te laten voor wat er nog gaat komen. Mijn opdracht aan de klas luidt:
Teken linksboven op je blaadje een (liggende) rechthoek. Kies zelf de lengte en de breedte (halve hokjes mag ook).
Dat je zelf de maten mag kiezen, is belangrijk voor het bewijs, vertel ik, want als iedereen dezelfde rechthoek neemt, klopt de stelling van Pythagoras misschien alleen maar bij die rechthoek!

Stap 2 – een vierkant met vier rechthoeken
Ik teken er nog drie dezelfde rechthoeken bij, ik teken diagonalen en zet de letters *l*, *b* en *d* bij de lijntjes, zoals ***in figuur 2***.
We bekijken het plaatje en zien een vierkant met zijde $l + b$, met daarin behalve vier dezelfde rechthoeken ook een klein vierkantje. En: een gedraaid vierkant met zijde *d*.
Opdracht aan de klas:
Teken op dezelfde manier als op het bord nog drie rechthoeken die precies even groot zijn als je eerste rechthoek (maak een 'kringetje' van vier rechthoeken) en voeg op dezelfde manier als op het bord diagonalen en letters toe.

Stap 3 – een vierkant met twee rechthoeken
Ik teken op het bord onder het grote vierkant nog zo'n vierkant, precies even groot, maar nu teken ik daar geen vier, maar twee van mijn eigen rechthoeken in. Ook nu teken ik diagonalen en zet ik letters bij de lijntjes, zoals ***in figuur 3***.
We bekijken ook dit plaatje en zien dat er ook in dit vierkant twee andere vierkanten zitten. Deze keer zijn het een vierkant met zijde *l* en een vierkant met zijde *b*.
Opdracht aan de klas:
Teken onder je vierkant nog zo'n zelfde vierkant, precies even groot, en teken er deze keer geen vier maar twee van je eigen rechthoeken in, op dezelfde manier als op het bord (eentje rechtsboven, staand, en eentje linksonder, liggend). Voeg ook in dit plaatje diagonalen en letters toe, net als op het bord.

Stap 4 – kleuren
In allebei de vierkanten geef ik vier halve rechthoeken een kleurtje (***zie figuur 4a*** en ***figuur 4b***). In het eerste vierkant zijn dat de vier buitenste halve rechthoeken; in het tweede zijn dat *alle* halve rechthoeken.
Opdracht aan de klas:
Kleur dezelfde halve rechthoeken als op het bord: bij je eerste vierkant de vier buitenste, bij je tweede vierkant alle halve rechthoeken.

Stap 5 – het bewijs
Ik vertel (en laat ze noteren): Als je van twee even grote oppervlakken hetzelfde stuk afhaalt, houd je twee even grote oppervlakken over.
Dus:
Als je in allebei de grote vierkanten de vier gekleurde stukken weghaalt (of wegdenkt), is wat je overhoudt in het ene grote vierkant even groot als wat je overhoudt in het andere grote vierkant.
Dus:
Het witte stuk in het eerste vierkant is even groot als de twee witte stukken in het tweede vierkant samen.
Dus:
De oppervlakte van het vierkant met zijde *d* is even groot als de oppervlakte van het vierkant met zijde *l* en de oppervlakte van het vierkant met zijde *b* samen.
Dus:
$d \times d = l \times l + b \times b$
En dat was wat we wilden bewijzen.

Slotopdracht:
Bewijs zelf (met tekeningen of schetsjes) dat voor elk ***vierkant*** *geldt:* $2 \times l \times l = d \times d$.

Noot

[1] Yvonne Killian (2006): *De stelling van Pythagoras voor de brugklas of groep 8*. In: *Euclides* 81(7); pag. 338. Dit nummer van *Euclides* is, als PDF-bestand, te downloaden via: *www.nvvw.nl/media/files/euclides/81-7.pdf*

Over de auteur

Yvonne Killian is leraar wiskunde op het Eerste Christelijk Lyceum te Haarlem.
Ze publiceerde in *Euclides* ook: *Formules onthouden voor cirkel en bol* (nr. 81(5); pag. 247), *Grenslengte* (nr. 84(8); pag. 296) en *Oppervlakteformules* (nr. 85(4); pag. 168).
Nummer 88(2) bevat de tekst van een interview met haar door Thomas Colignatus (pp. 83-84; Titel: *Pas je uitleg aan*).
E-mailadres: *yvonne.killian@planet.nl*

Vanuit de oude doos

$A^o \, 19\frac{29}{30}$

[Ton Lecluse]

In deze rubriek bespreek ik enkele opgaven die de vorige eeuw tot in de tweede wereldoorlog in toelatingsexamens voor universiteiten zijn gebruikt. Ik beperk me tot opgaven die, naar mijn mening, ook door de huidige leerlingen wiskunde op het vwo gemaakt moeten kunnen worden, wellicht met enige hulp of als kleine praktische opdracht. Mogelijk geeft een van de opgaven u een handvat om eens een opgave in zo'n vorm te ontwerpen!

Deze keer eerst een echt pittige analytische opgave uit 1930 en voor de *cooling down* een eenvoudige opgave uit 1929.
Wellicht vindt u het leuk om de opgaven eerst zelf te proberen. Misschien vindt u de opgave wel te doen voor uzelf, maar uw leerlingen hebben wellicht een andere mening.
Verderop treft u mijn uitwerking aan.

De eerste opgave (1930)

Van driehoek *ABC* is *CD* de hoogtelijn uit *C* en *O* het middelpunt van de omgeschreven cirkel. Als het oppervlak van driehoek *AOB* gelijk is aan dat van driehoek *ACD* en $\angle B = 30°$, vraagt men de hoeken *A* en *C* te berekenen.

De tweede opgave (1929)

Van een rechthoekige driehoek is de schuine zijde *c* gegeven. Bereken de hoeken voor het geval dat $2a + 3b$ zo groot mogelijk is (*a* en *b* zijn de rechthoekszijden).

Uitwerking van de eerste opgave

Wellicht enige handvatten (***zie figuur 1***):

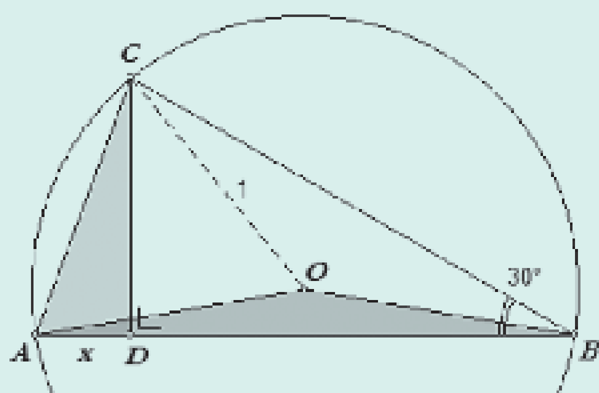
- $\angle AOC = 60°$ (*middelpuntshoek bij een omtrekshoek van* 30°), en $OA = OC$ (*cirkelstraal*), dus is driehoek *AOC* gelijkzijdig. Dus $AC = OA = OB$.
- Het model kan ook worden beschouwd als een vaste cirkel met koorde *AC*, waarbij het punt *B* de cirkel doorloopt. Hierbij verplaatsen zich dus alleen de punten *B* en *D*.
- De driehoeken *ACD, OCM* en *OBM* (waarbij *M* het midden is van *BC*) zijn congruent.

Een mogelijke aanpak – Alhoewel vaak bij opgaven van dit type een meetkundige aanpak elegant is, kan ook worden gekozen voor een analytische aanpak. Kies een geschikt assenstelsel, voer voor een van de onbekenden (lengte van een lijnstuk of grootte van een hoek) een parameter in en druk geschikte andere hoeken en lijnstukken uit in deze parameter.
Zonder de algemeenheid te schaden, kan de cirkelstraal 1 worden genomen.

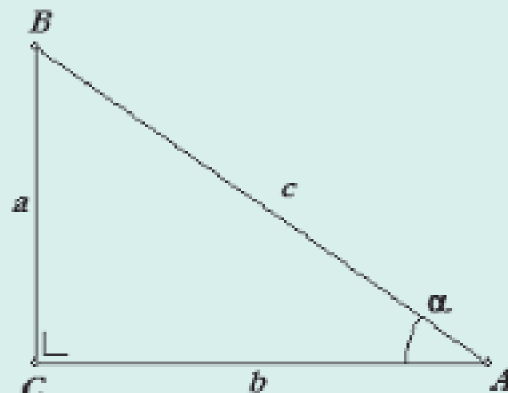
Omdat *CD* loodrecht staat op *AB*, kies ik ervoor *AB* als horizontale en *CD* als verticale as te gebruiken.

Een eerste poging – Stel $\angle ACD = x$, dan is $AD = \sin x$, $CD = \cos x$, $BD = \sqrt{3} \cdot \cos x$.
Dus is:
$BD = \sin x + \sqrt{3} \cdot \cos x$
Van de gelijkbenige driehoek *OAB* zijn de zijden bekend, en kan de hoogte worden bepaald:
$$h = \sqrt{1 - \tfrac{1}{4}(\sqrt{3} \cdot \cos x + \sin x)^2}$$
Nu kan de oppervlakte van deze driehoek worden uitgedrukt in *x*, en gelijk worden gesteld aan die van driehoek *ACD*. Dit levert echter een draak van een gonio-vergelijking op, die zonder moderne grafische rekenmachine niet echt aantrekkelijk is.
Hoe ver komt u?

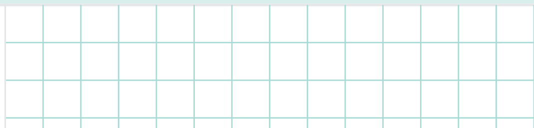
Een tweede poging – Stel $AD = x$, dan is
$AC = \sqrt{1 - x^2}$ en $BD = \sqrt{3 - 3x^2}$.
De oppervlakte van driehoek *ACD* is nu gelijk aan:
(1)... $opp(ACD) = \tfrac{1}{2}\sqrt{1 - x^2}$
$AB = x + \sqrt{3 - 3x^2}$, zodat de hoogte *h* van driehoek *AOB* gelijk wordt aan:
$$h = \sqrt{1 - (\tfrac{1}{2}(x + \sqrt{3 - 3x^2}))^2}$$
Na enige algebra geeft dit:
$$h = \sqrt{\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x\sqrt{3 - 3x^2}}$$, zodat:



figuur 1



figuur 2



(2)... $opp(AOB) = \frac{1}{2}(x + \sqrt{3 - 3x^2}) \cdot h$

Gelijk stellen van de relaties (1) en (2) geeft na kwadrateren en enige algebra:

$$3x^2 - 3x^4 - \tfrac{3}{4} = (2x^3 - x)\sqrt{3 - 3x^2}$$

En dit is een mooie uitdrukking waarin in beide leden de factor $2x^2 - 1$ aanwezig is:

$$-\tfrac{3}{4}(2x^2 - 1)^2 = x(2x^2 - 1)\sqrt{3 - 3x^2}$$

Na wegdeling van deze factor ($x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ voldoet namelijk niet) krijgen we:

$$-\tfrac{3}{4}(2x^2 - 1) = x\sqrt{3 - 3x^2}$$

hetgeen (na kwadrateren en op 0 herleiden) oplevert:

$$28x^4 - 28x^2 + 3 = 0$$

met als positieve oplossingen $x = \sqrt{\frac{7 \pm 2\sqrt{7}}{14}}$, waarvan alleen de +variant blijkt te voldoen in de tekening. Dus:

$$\angle A = \arcsin\sqrt{\frac{7+2\sqrt{7}}{14}} \approx 69{,}55330268°$$
$$\approx 69°33'12''$$

En $\angle C$ mag u zelf doen.

Bovenstaande uitwerking is fors; pas na weglating van veel algebra ontstond bovenstaande compacte uitwerking. Ik daag u uit een uitwerking te maken die flink eenvoudiger is; wellicht een meetkundige? Ik ben benieuwd!

Uitwerking tweede opgave

Een werkschets staat ***in figuur 2***. De aanpak is relatief eenvoudig: c is vast, en b kan worden uitgedrukt in a (en c), en zo ook de uitdrukking $2a + 3b$. Dit resulteert in een functie van a, waarvan het maximum kan worden bepaald met differentiëren. Probeert u het even? En, wacht… wacht… wacht…

De stelling van Pythagoras geeft $b = \sqrt{(c^2 - a^2)}$, zodat:

$$2a + 3b = 2a + 3\sqrt{(c^2 - a^2)} = f(a)$$

Dan is:

$$f'(a) = 2 + 3 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (c^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2a)$$
$$= 2 - \frac{3a}{\sqrt{(c^2 - a^2)}}$$

Gelijk aan 0 stellen geeft als positieve oplossing $a = \frac{2c}{\sqrt{13}}$, zodat:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Dit geeft $\alpha \approx 33{,}69006753° \approx 33°41'24''$.

Deze opgave kan zeker gebruikt worden in een schoolexamen.

Bron

Dr. Th.G.D. Stoelinga, Dr. M.G. van Tol (1958): *Wiskunde-Opgaven van de toelatingsexamens tot de Universiteiten van 1925 tot en met 1958*. Zwolle: N.V. Uitgevers-maatschappij W.E.J. Tjeenk Willink (8e druk).

Over de auteur

Ton Lecluse is docent wiskunde aan 't Hooghe Landt te Amersfoort.
E-mailadres: *alecluse@casema.nl*

VMBO (DIGI)TALIGE EXAMENS AANVULLING

[Klaske Blom]

In het septembernummer van *Euclides* (jrg. 88, nr. 1, 2012; pp. 49-51) schreef ik een artikel over het digitale VMBO-kader-examen, 'VMBO, (digi-)talige examens'.
In de laatste paragraaf van dit artikel heb ik mijn verbazing uitgesproken over het feit dat sommige leerlingen in hun herkansings-versie opgaven kregen voorgelegd die ze ook gemaakt hadden in het examen van het eerste tijdvak. Ik suggereerde hierbij dat dit een keus van de examenmakers geweest is. Dit blijkt niet correct.
In de voorlichtingsbrochure van het CvE staat hoe om te gaan met het toekennen van herkansingsvarianten. Indien dit op een juiste manier gebeurt, krijgt een leerling bij de herkansing andere vragen dan tijdens het eerste tijdvak.
We hebben op school natuurlijk geanalyseerd wat er mis gegaan is. Aan het begin van elk schooljaar wordt vermeld hoe om te gaan met de herkansingsversies; daarna komt deze informatie niet meer terug. Ik kan hier alleen maar de hoop uitspreken dat onze ervaring voor andere scholen een waarschuwing zal zijn en dat in de procedure rond het afnemen van de examens een extra check wordt ingebouwd, zodat het maken van dergelijke fouten onmogelijk wordt.

Over de auteur

Klaske Blom is docente wiskunde op de Open Schoolgemeenschap Bijlmer in Amsterdam.
E-mailadres: *klaskeblom@gmail.com*

Boekbespreking /

HET LABYRINT VAN OCCAM

[Leon van den Broek]



Ondertitel: Breinbrekers voor alle wiskundeliefhebbers
Auteur: Arnout Jaspers
Uitgever: Bert Bakker (2012)
ISBN 9789035137646
prijs: €19,95 (196 pagina's; paperback)

De titel

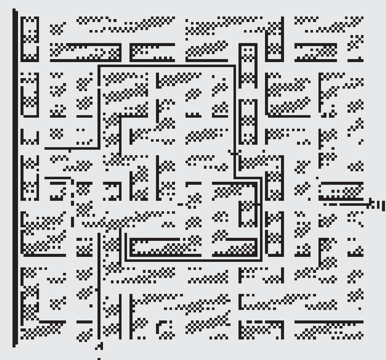
De Engelse monnik William van Occam (ca. 1288-1347) was een scholasticus, een middeleeuwse denker. Naar hem is de volgende opvatting genoemd (het 'scheermes van Occam'; red.): Snijd van het verschijnsel alle overbodige veronderstellingen weg, dan houd je de waarheid over; de meest eenvoudige verklaring is de juiste. Erg praktisch om problemen op te lossen vind ik dit niet. Immers, pas als ik een probleem heb opgelost, is duidelijk welke gegevens er eigenlijk niet toe deden, maar ik weet niet bij voorbaat welke dingen ik moet wegsnijden.
Het woord 'labyrint' in de titel geeft aan dat het boek een jungle van problemen is: het zijn er veel, ze zijn lastig en rijk gevarieerd. Je kunt ook elk afzonderlijk probleem zien als een labyrint: je bent erin verzeild geraakt en moet nu een uitweg zien te vinden.
Ten slotte nog de ondertitel: 'breinbrekers voor alle wiskundeliefhebbers'. Inderdaad wordt een zwaar beroep gedaan op de vindingrijkheid van de lezer. Veel steun aan je wiskundekennis heb je niet; daarvoor zijn de problemen te origineel. Bovendien zijn veel problemen open gesteld: de precieze regels worden niet verteld, maar moet je juist zelf uit de situatie halen. Sangaku's zijn hiervan sprekende voorbeelden. Dat zijn meetkundige figuren die een wiskundige stelling uitbeelden. Welke stelling dat is, moet je zelf ontdekken, en dan moet je hem natuurlijk ook nog bewijzen.
Een ander fraai voorbeeld is het probleem ***in figuur 1***. De opdracht luidt:
In dit labyrint is de enig mogelijke route van IN naar UIT aangegeven. Aan welke 'natuurwet' moet een route voldoen?

Een rijkdom

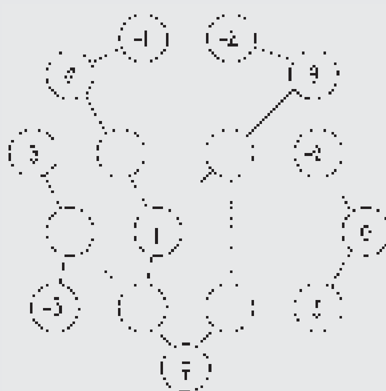
Het boek is een potpourri. Er zit geen structuur in de verzameling puzzels. Weliswaar komen de problemen in vier 'verdiepingen' voor, die oplopend in moeilijkheid zouden zijn, maar voor mij waren alle verdiepingen even moeilijk. Raadsels, meetkundige problemen, sudoku-achtige puzzels, wiskunde-olympiade-achtige vragen, puzzels geënt op het schaakspel, logica-taal-problemen, strategische spelen, rekenvragen (bijvoorbeeld in verband met ggd, kgv), puzzels in netwerken, … wisselen elkaar af, maar eigenlijk zijn de problemen niet in categorieën te vangen. En dat vind ik de charme van het boekje.
En dat is nog niet alles. Veel problemen hebben een open einde: de lezer wordt uitgenodigd voor een zogenaamd *nader onderzoek.*
Het taalgebruik getuigt van humor, zoals de keuze van namen: Volksfront Voor Deemoedigheid, marktwerkingsrisicoafdekkingstegemoetkoming, hoofdbrekenen, …
De denkvragen zijn ingebed in duidelijk verzonnen verhaaltjes. Niet realistisch uiteraard, maar dat hoeft ook niet. Zonder de verhaaltjes zou er geen probleem zijn.

Hoe gebruik je het boek

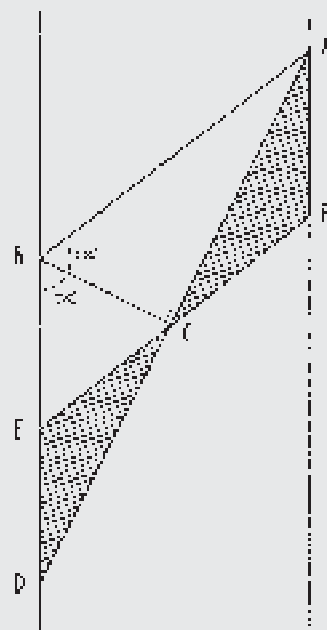
Ik kreeg de indruk dat ik voortdurend aan een intelligentietest werd onderworpen. Wat bijvoorbeeld te denken van de puzzel Webcijferen (***zie figuur 2***). De bijbehorende tekst luidt:



figuur 1



figuur 2



figuur 3

De cijfers in dit web voldoen aan een verborgen wet. Daardoor zijn de vijf ontbrekende getallen maar op één manier in te vullen.
Daar moet je het mee doen.

Knap van Arnout Jaspers is dat hij zo veel nieuwe problemen bij elkaar heeft gebracht. Ik had tenminste de meeste nooit eerder gezien. Voor de meeste problemen is geen wiskundige voorkennis nodig. Sterker, bij een planimetrisch probleem als Sangaku 3 (***zie figuur 3***) legt Jaspers het probleem voorzichtig uit. Hij is zeer expliciet in zijn uitleg: bij geen enkele stap beroept hij zich op een bekende stelling uit de vlakke meetkunde (bijvoorbeeld een congruentie). Als wiskundige heb ik geen behoefte aan die grondige, elementaire behandeling. Heel anders is het bij een sudoku. Achterin staat daarvan alleen het antwoord, terwijl ik graag op weg zou zijn geholpen.
Het boek leest dus bepaald niet als een roman. Hoe met deze bonte verzameling om te gaan?

Als een lezer de helft van de puzzels weet op te lossen, is dat heel mooi. Maar is hij daar tevreden mee? De andere helft bracht hij immers niet tot een goede oplossing.
Ik zal schetsen hoe het mij is vergaan met het raadsel Webcijferen. Ik snapte er helemaal niets van, legde het probleem na een minuut of tien opzij. Later op de dag heb ik er nog een paar minuten ernaar gekeken, zonder ook maar iets op te schieten. Volgende dag weer 5 à 10 minuten aan de puzzel besteed, met even weinig resultaat. Achterin kijken bij de oplossing was voor mij geen optie. De derde dag zag ik de oplossing ineens. Dat geeft veel voldoening. Nu ben ik Arnout Jaspers dankbaar voor de puzzel.
Ik weet niet hoe de huidige Internet-generatie met zulke puzzels omgaat. De zoekhouding van veel jongeren is praktisch: als je niet onmiddellijk een aanpak ziet, ga je googelen. Maar dat is nu niet nodig, want achterin het boekje kun je de oplossing vinden.
Anderzijds zal geen mens de sudoku in de krant van vandaag 'oplossen' door de puzzelpagina van de krant van morgen af te wachten. Bij een puzzel gaat het dus om het puzzelen, niet om het antwoord.
Van belang is dat de koper van *Het Labyrint van Occam* weet wat hij koopt. Je kunt dagen in *Het Labyrint* doorbrengen, misschien wel zonder de uitgang te vinden. Als we de gemiddelde tijd voor een probleem even stellen op 1 uur, dan geeft het boek 84 uur puzzelplezier, of puzzelwanhoop. Dat is 25 eurocent per puzzel.
Ik zou willen adviseren: pik eruit wat je aanstaat.

Een aardig gebruik van het boek lijkt mij dit: leg het op de salontafel en praat met bezoekers over een probleem dat jij ook nog niet hebt opgelost. En doe niet meer dan één probleem per dag.

Bij enkele problemen mis ik een werkblad, om eens wat uit te proberen. Natuurlijk kan ik zelf een tekening maken en in de weinige gevallen dat dat niet kan, helpt een scan. Maar misschien is het toch wel een aardig idee om werkbladen aan te bieden via de website van de uitgever, of denk ik nu te schools?
Voor het gemak van de lezer zou bij elk probleem de pagina vermeld kunnen zijn waarop de oplossing is te vinden.

Het boek bevat voor elk wat wils en is een must voor de puzzelaar die aan nieuwe uitdagingen toe is. Voorlopig heb ik het nog niet 'uit'.

Over de recensent

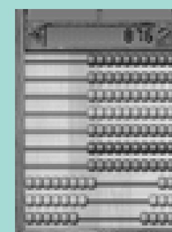
Leon van den Broek was leraar wiskunde aan RSG Pantarijn te Wageningen, is auteur van verschillende wiskunde-lesmaterialen en is betrokken bij diverse wiskundewedstrijden voor middelbare scholieren.
E-mail: *L.vandenBroek@math.ru.nl*

Info [Red.]

Van de achterkant – Iedereen met een scherpe geest kan op ontdekkingsreis in *Het Labyrint van Occam*, waar logica en wiskunde de essentie zijn van de werkelijkheid. Het Labyrint is een doolhof van breinbrekers waarin je met slimme denksprongen elk dwaalspoor moet zien te vermijden.
(…)
Behalve wonderlijke varianten van klassiekers als de sudoku, het magische vierkant en het kruiswoordraadsel, ontwierp Arnout Jaspers echte breinbrekers zoals het openbreintentamen, de getalpaargenetica en de atoomkerntrisectie.
Grote delen van het Labyrint kun je zonder enige kennis van de wiskunde verkennen, maar er zitten ook stevige uitdagingen tussen, waar je gemakkelijk enkele dagen in verdwaalt. Voor de meest gemotiveerde ontdekkingsreizigers bevat het Labyrint talrijke suggesties voor nader onderzoek. Met William van Occam in gedachten, zul je uiteindelijk de uitweg vinden in dit wonderbaarlijke labyrint.
Arnout Jaspers is hoofdredacteur van wiskundetijdschrift *Pythagoras* en freelance wetenschapsjournalist voor onder meer *VPRO*, *NTR* en *de Volkskrant*. Eerder verscheen mede onder zijn redactie *De Pythagorascode*, het beste uit vijftig jaargangen *Pythagoras*.

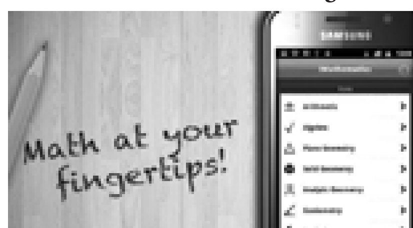
Wiskunde digitaal

iMATHEMATICS VERSIE 3.14...



[Lonneke Boels]

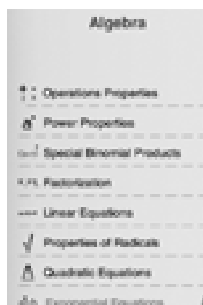
Geschikt voor iPhone, iPad en iPod touch, maar ook voor Android 1.6 of hoger



iMathematics is geen spel maar een gedegen en uitgebreid naslagwerk voor wiskunde. De uitleg is in het Engels en het bevat veel onderwerpen van de wiskunde in onder- en bovenbouw. Het is geschikt als naslagwerk in de klas voor tweetalig onderwijs in de onderbouw en de (ook Nederlandstalige) bovenbouw van havo en vwo.

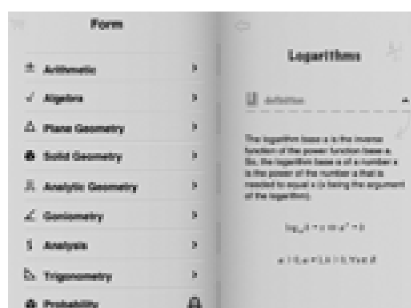
In de app iMathematics vind je definities, begrippen, formules en oplossingsmethoden voor uiteenlopende onderwerpen. Het is vergelijkbaar met het *Polytechnisch Zakboek* dat ik destijds bij mijn universitaire studie veel gebruikte. De behandeling van de onderwerpen is vrij formeel. Vaak wordt doorverwezen naar bronnen zoals WikipediA (in het Engels!).

Van iMathematics bestaat een gratis en een betaalde versie. De gratis versie bevat een flink aantal onderwerpen die voor leerlingen interessant zijn. Voor leerlingen uit de onderbouw en leerlingen met wiskunde-B zijn dit vrijwel alle onderwerpen die in de wiskunde worden behandeld. Kansrekening zit in de betaalde versie dus leerlingen met wiskunde-A missen een belangrijk domein. De onderwerpen uit de gratis versie zijn: Arithmetic, Algebra, Plane Geometry, Solid Geometry, Analytic Geometry, Goniometry, Analysis, Trigoniometry, Probability. Bij algebra (***zie figuur 1***) vinden de leerlingen bijvoorbeeld de rekenregels van de machten en logaritmen. Sommige onderdelen van de algebra zitten in de betaalde versie.



figuur 1

Een flink deel van de 'betaalde stof' behoort tot de wiskunde van hbo en universiteit, zoals de regel van Cramer, maar bijvoorbeeld het onderwerp exponentiële vergelijkingen behoort wel tot de stof van de middelbare school en vindt u alleen in de betaalde versie. De notatie verschilt hier en daar wel van de notatie in de wiskundeboeken van de middelbare school. Dit probleem is voor leerlingen minder groot dan het lijkt, want bijvoorbeeld de notatie voor logaritmen, $\log_a b$, is even wennen, maar is exact zo terug te vinden in de nieuwste versie van de TI en Casio.



figuur 2



figuur 3 De notatie $\log_a b$ kunnen leerlingen ook gebruiken op de nieuwste versie van de TI 84 en Casio. Je vindt deze in het menu Math Logbase.

Voor leerlingen zijn sommige onderdelen lastig te vinden, zoals de logaritmen. Ga naar *Algebra* en scroll naar beneden of kies *Power Properties* en scroll dan helemaal naar onderen. Ook missen leerlingen soms wat uitleg. Bijvoorbeeld over wat arctan is. Mogelijk zit dat er wel in, maar het is in elk geval niet direct te vinden door bijvoorbeeld op 'arctan' te tikken.
Het voordeel van de betaalde versie is dat de *flash quiz* een korte overhoring over de stof bevat. Sommige vragen in de flash quiz zijn echter onduidelijk. Bijvoorbeeld de vraag bij algebra tot welk domein '*a*' behoort. Het is een quizvraag bij het onderwerp 'rekenregels machten'. Hier is bedoeld de '*a*' uit a^n maar dat staat nergens. Nadeel is verder dat deze flash quiz bij de rekenregels van de machten telkens hetzelfde is als je de quiz opnieuw wilt maken.

Als je onderin het scherm tikt op *utilities*, blijkt er bovendien nog een tweede applicatie in te zitten: allerlei rekenmachines en *solvers*, bijvoorbeeld voor kwadratische vergelijkingen. Hij werkt niet echt handig maar is wel leuk, omdat hij niet alleen de oplossingen geeft, maar andere waarden zoals de oppervlakte onder een kromme en boven de *x*-as, en de formule van de afgeleide.

Pluspunten

- Allerlei handige formules en wiskunde-feitjes bij elkaar.
- Het is geschikt voor de bovenbouw havo-vwo en voor tweetalig onderwijs.
- Ideaal voor leerlingen die de boeken van voorgaande schooljaren niet meer hebben.
- Bevat veel onderwerpen van de middelbare school.
- Notatie komt overeen met de notatie op grafische rekenmachines.
- Bevat verwijzingen naar websites en extra oefenmateriaal.
- Leerlingen vinden het handig en nuttig. Met name bij het oefenen voor het eindexamen.
- Je kunt met je vinger schrijven op de plek waar staat 'Make your calculations here'.

- Je kunt de gratis versie uitproberen en als deze bevalt alsnog de Pro versie aanschaffen.

Pluspunten Pro versie (betaald)

- De flash quiz is een soort overhoring over het onderwerp.

Minpunten

- Kansrekening van wiskunde-A en wiskunde-C zit alleen in de betaalde versie.
- Het oefenmateriaal is betaald.
- Het is in het Engels met een andere notatie dan in de schoolboeken.
- Het is voor leerlingen soms lastig zoeken waar bepaalde informatie te vinden is.
- De calculator voegt niets toe en staat op een erg klein scherm waarvan de lay-out niet klopt. Dat is ook in de Pro versie zo.
- De support site is niet te vinden.

Minpunten Pro versie (betaald)

- Sommige vragen in de flash quiz zijn onduidelijk.
- De vragen in de flash quiz zijn steeds hetzelfde.

Eindoordeel: aanschaffen

Kosten: gratis
Uitgebreide versie kost € 2,69
Verdere info (Italiaans): *http://werasoft.com/app/imathematics/*
en: *https://itunes.apple.com/us/app/imathematics!/id337535181?mt=8*

Over de auteur

Lonneke Boels is wiskundedocent op het Christelijk Lyceum Delft, docent vakdidactiek rekenen op de Haagse Hogeschool en directeur van Alaka, professionals in wiskunde en rekenen.
E-mailadres: *L.Boels@alaka.nl*

Werkgroep Geschiedenis Reken- en Wiskundeonderwijs

AANKONDIGING / SYMPOSIUM WGRWO

ALLEMAAL AANSLUITEN, GRAAG!

[Harm Jan Smid]

Het negentiende symposium van de Werkgroep Geschiedenis van het Reken-WiskundeOnderwijs, de WGRWO (voorheen HKRWO), zal plaatsvinden op **zaterdag 20 april 2013**, onder de titel *Allemaal aansluiten, graag!*
Het thema van het symposium is de aansluitingsproblematiek tussen primair en secundair onderwijs op het gebied van het rekenen. Natuurlijk zal de geschiedenis een belangrijke rol spelen, maar we zullen de verbinding met de actualiteit dit keer bepaald niet uit de weg gaan.

- Toen de HBS in 1863 van start ging, wilde Thorbecke, de opsteller van de wet op het middelbaar onderwijs, niets weten van toelatingseisen voor dit nieuwe schooltype. In de praktijk was die vrijheid niet houdbaar, en in 1873 werd een toelatingsexamen verplicht gesteld.
  Tegen wat voor aansluitingsproblemen problemen liep men die eerste jaren zoal aan?
  Spreker: *Jenneke Krüger*
- In de jaren twintig van de vorige eeuw hebben Philip Kohnstamm en zijn medewerkers uitgebreid onderzoek gedaan naar de waarde van het toelatingsexamen, in het bijzonder voor het vak rekenen.
  Leveren zijn bevindingen nog bruikbare inzichten op voor huidige onderwijspraktijk?
  Spreker: *Jo Nelissen*
- Er is de afgelopen decennia veel onderzoek gedaan naar de rekenprestaties van Nederlandse leerlingen, zoveel dat het soms lastig is nog door de bomen het bos te zien. Een goed historisch overzicht waarbij zaken in ruimer verband worden bezien kan helpen de grote lijn weer te pakken te krijgen.
  Spreker: *Joop Bokhove*
- Na de – soms felle – discussies van afgelopen jaren over het Nederlandse reken- en wiskundeonderwijs lijkt het rapport van de KNAW-commissie een kans te bieden beide kampen wat tot elkaar te brengen.
  Hoe kijken we terug op het werk van die commissie en hoe nu verder?
  Spreker: *Rob Tijdeman*

Plaats, tijd, aanmelding, kosten

Het symposium zal ook deze keer weer plaatsvinden in het Congres- en vergadercentrum Domstad, Koningsbergerstraat 9 in Utrecht (3531 AJ), vlak bij het Centraal Station.
Inloop en koffie vanaf 9:30u, start programma 10:15u, einde circa 15:30u.

U kunt zich opgeven bij Harm Jan Smid, via e-mail *h.j.smid@ipact.nl*, onder gelijktijdige overmaking van € 25,00 op rekening 4657326 te name van WGRWO te Leiden. Lunch, koffie en thee zijn inbegrepen in de kosten.

Een goed begin is...

BORDEN

[Erika Bakker]

Erika Bakker is dit schooljaar gestart met haar LIO-stage wiskunde, als onderdeel van haar Educatieve Master, en deelt haar belevenissen met u. In dit nummer de vierde aflevering van haar rubriek.

Op school zijn de lokalen verschillend ingericht. In de meeste lokalen waar ik lesgeef, hangt een digibord. In die lokalen hangt ook altijd een klein whiteboard. In andere lokalen hangt een groot whiteboard of een krijtjesbord. In het begin van het schooljaar zat ik het liefst in een lokaal zonder digibord. Ondanks dat de krijtjesborden soms heel erg vies zijn, en je bij de whiteboarden voor de zekerheid altijd je eigen stiften mee moet nemen, weet je wel zeker dat het altijd werkt.

Van de school heb ik een laptop te leen. Hierop staat het programma waarmee ik met de digiborden kan werken. Een voordeel daarvan is dat ik thuis mijn lessen hiermee digitaal kan voorbereiden. Dat heb ik tot nu toe nog weinig gedaan. Toen ik zelf op de middelbare school zat, waren er op die school helemaal geen digiborden. Daarom vind ik het lastig om de meerwaarde van een digibord te gebruiken. Binnenkort moet ik voor de opleiding weer een aantal leerdoelen opstellen. Om mezelf te dwingen toch gebruik te maken van alle functies van de digiborden heb ik bedacht dat dit als leerdoel in mijn POP – mijn persoonlijk ontwikkelingsplan – wil opnemen.



Om hiermee alvast een beetje te oefenen heb ik voor een van mijn brugklassen een zelfbedachte opdracht over kijklijnen en een quizje gemaakt. Met Geogebra heb ik verschillende hoeken getekend en die achter elkaar gezet, zodat ik ze één voor één kon vertonen. Mijn idee was om de klas steeds te vragen wat voor hoek het was: scherp, recht, stomp of gestrekt. Toen ik op mijn rooster keek, zag ik dat ik deze les helemaal niet in een lokaal met digibord zou zitten. Snel heb ik mijn voorbereiding aangepast, zodat ik geen digibord maar alleen een beamer nodig had. Die hangt er in het lokaal namelijk wel. Maar hiermee was het probleem nog niet opgelost.
De beamer in het betreffende lokaal is er namelijk eentje met een gebruiksaanwijzing. Gelukkig hangt er een krijtjesbord dat het altijd doet, maar daar had ik voor mijn quizje niets aan. Ik had de beamer ook al een keer tijdens een les in havo-4 gebruikt. Toen kreeg ik hem met de afstandsbediening niet aan. Een leerling vertelde dat hun vorige docent in dat soort situaties altijd een andere bediening gebruikte: de bordliniaal. Dan ging de docent op een tafel staan om met de bordliniaal op het knopje van de beamer te drukken. De leerling bood aan dit voor mij te doen. Dit werkte toen inderdaad. Zo kon ik dat lesuur in havo-4 de gemaakte toets gemakkelijk bespreken.

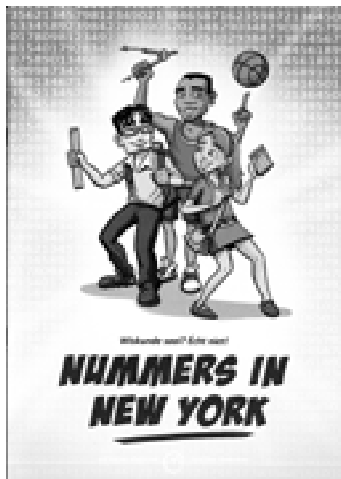
Voorafgaand aan mijn quizles in de brugklas had ik een tussenuur. Het lokaal met de bijzondere beamer was niet bezet. Ik had dus genoeg tijd om met de beamer te prutsen. Vanuit allerlei plekken in het lokaal richtte ik de afstandsbediening op de beamer, maar dit had geen enkel effect. Er zat niets anders op: ik ben op een tafel gaan staan en heb met de liniaal de beamer aangezet. Toen de brugklas binnenkwam, stond de kijklijnenopdracht klaar. De quiz was zeker niet flitsend, maar alle leerlingen deden actief mee.
Aan het eind van het lesuur kwam de docent binnen over wie de leerling uit havo-4 het eerder gehad had. Hij zag dat de beamer aan stond en vroeg of het aanzetten een beetje handig was gegaan. Ik vertelde dat ik toch op een tafel was gaan staan. Eigenlijk ben ik wel heel benieuwd wat de klas dacht op het moment dat ik dat zei. Een paar nieuwsgierige blikken zag ik wel. Misschien hadden ze dat wel heel erg graag willen zien. De docent vertelde me op welke plek in de klas ik moest gaan staan en hoe ik mijn hand moest houden om de beamer met de afstandsbediening uit te zetten. Ik probeerde het. Het werkte inderdaad.

Nu is er, ook als ik in dit lokaal les geef, geen reden meer om alleen maar gebruik te maken van het oude vertrouwde bord. De middelen en de motivatie zijn er en met mijn POP als extra stok achter de deur moet het zeker lukken om de meerwaarde van beamers en digiborden te benutten.

Over de auteur
Erika Bakker studeert aan de Rijksuniversiteit Groningen. In 2010 rondde ze haar Bachelor Wiskunde af. Nu doorloopt ze in het kader van haar Educatieve Master een LIO-traject.
E-mailadres: *h.b.bakker.1@student.rug.nl*

Boekbespreking / NUMMERS IN NEW YORK

[Ingrid Berwald]



‘Ondertitel’: Wiskunde saai? Écht niet!
Auteur/tekenaar: Stephan Timmers
Uitgever: Total Shot Productions, Delft
ISBN: 978-90-810575-0-9
Prijs: € 7,00 (24 pagina’s; stripboek)
Informatie: *www.totalshot.nl*

Het verhaal

Nummers in New York gaat over drie jongeren die een spannend avontuur beleven. Hun namen beginnen toepasselijk in volgorde van opkomst met een A, B en C, Anna, Bao en Charley. De drie krijgen steeds een probleem dat ze op moeten lossen, voor het eerste probleem moeten ze naar de Empire State Building.
Als je een muntje van de Empire State Building laat vallen, op welke verdieping is het dan na 5 seconden?
Als ze de vraag goed beantwoorden, vinden ze op die verdieping drie getallen. Daarbij krijgen ze ook nog een formule van een parabool, die ze naar een brug stuurt waar ze weer drie getallen vinden.
Het derde probleem gaat over de inhoud van een watertank in de vorm van een cilinder, ook hier scoren ze drie getallen. De getallen blijken coördinaten in New York te zijn (street, avenue, hoogte), de punten gegeven door de combinatie (street, avenue) liggen op een rechte lijn – dat is trouwens niet aan de coördinaten te zien. Als ze de lijn doortrekken, gaat deze door Ground Zero. Daar aangekomen vinden ze 10 dollar. Doordat Bao goed kan rekenen, weet hij het geld handig in te zetten op de beurs; zo verdient hij in korte tijd veel geld. De andere twee bezoeken het hoofdkantoor van de VN, waar ze op het dak opgepikt worden door een helikopter van Bao. Ze vliegen naar het Vrijheidsbeeld waar ze de mensen ontmoeten die ze de raadsels hebben gegeven. Deze mensen blijken ze zelf te zijn, maar dan 20 jaar ouder, met een tijdmachine teruggekomen om de drie jongeren bij elkaar te brengen.

Het boekje

Het hele verhaal staat op 17 bladzijden waarna er een aantal pagina’s met oefeningen volgt. Deze oefeningen beginnen met de basiskennis van het rekenen, maar ook wortels en machtsverheffen komen aan de orde. Deze rekenpagina’s beginnen steeds met plaatjes en voorbeeldsommen waarna er een oefenopgave volgt. Deze opdrachten staan los van het verhaal en zijn individueel te maken.

De docentenhandleiding

Bij het boekje is een docentenhandleiding beschikbaar. De docentenhandleiding maakt het hele boekje ineens een stuk interessanter; er staan verwijzingen van de opgaven naar het stripverhaal. Deze opdrachten moeten wel klassikaal gemaakt worden. Zo is er bij opdracht 1 uit het boekje de volgende klassikale opdracht:
*Kijk naar pagina 3 plaatje 5 (**zie figuur 1**). Zoals op dit plaatje te zien is, is er een verschil tussen Duomenu’s en Maandmenu’s. Anna en Bao hebben snel uitgerekend dat twee Duomenu’s duurder zijn dan vier Maandmenu’s.*
Laat de berekening zien die hierbij hoort.



Pluspunten

- Het verhaal is spannend en leuk getekend;
- De strip is kort en kan daardoor in een les even gelezen worden;
- De opgaven lopen op in moeilijkheidsgraad en zijn daardoor voor vmbo tot en met vwo geschikt.

Minpunten

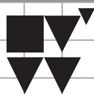
- Het boekje is duur (€ 7,00), zeker als je er klassikaal uit wilt werken;
- De plaatjes bij het rekenen zijn soms wat ver gezocht;
- Leerlingen werken zonder docentenhandleiding en missen daardoor de verwijzingen. Hierdoor lijken de opgaven niets met de strip te maken te hebben.

Het stripboek heeft als doel leerlingen in de eerste en tweede klas van het voortgezet onderwijs (vmbo, havo en vwo) op een prettige manier te helpen met de overstap van het rekenen in groep 8 naar het vak wiskunde. Dit doel wordt volgens mij alleen bereikt als je klassikaal met de opdrachten uit de docentenhandleiding aan de slag gaat, maar dat is gezien de prijs wellicht wat duur.

Eindoordeel: aanschaffen

Over de recensent
Ingrid Berwald is docente wiskunde aan het Libanon Lyceum te Rotterdam. Ze geeft les aan havo- en vwo-klassen en vindt het belangrijk dat alle leerlingen positieve ervaringen opdoen tijdens de wiskundelessen.
E-mailadres: *bwd@llr.nl*





Registerleraar.nl – het vervolg



VAN, VOOR EN DOOR DE LERAAR

[Marianne Lambriex]

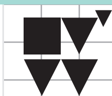
Even bijpraten
Sinds het vorige artikel in *Euclides* over Registerleraar.nl [1] is er hard gewerkt aan de realisatie van een register voor leraren. Intussen is er een registercommissie per sector po, vo en mbo ingesteld. De vijf lidorganisaties – AOb, BON, CNV Onderwijs, FvOv, PVVVO – die ook het bestuursakkoord van de Onderwijscoöperatie hebben ondertekend, hebben hierin per sector een vertegenwoordiger benoemd. Zo heb ik namens het PVVVO zitting in de RCVO (registercommissie vo). De registercommissies houden zich nu nog voornamelijk bezig met het valideren en waarderen van professionaliseringsactiviteiten (PA's), en in de toekomst met de herregistratie van de docenten. Er zijn momenteel al meer dan negenduizend registerleraren en dagelijks komen er bij.
Van verschillende kanten krijg ik vragen over het lerarenregister. Vragen waaruit blijkt dat er veel belangstelling voor is, maar vaak bespeur ik een ondertoon van: ik moet wel een heel goede of speciale docent zijn om geregistreerd te raken. En dat is een misverstand.
Ben je een bevoegde docent (2de of 1ste graads) met een aanstelling groter of gelijk aan 0,2 fte, die de ontwikkelingen in je vakgebied en onderwijs bijhoudt, dan voldoe je al heel snel aan de criteria voor herregistratie. Die criteria zijn: 160 uur in 4 jaar aantoonbaar bezig geweest met PA's, waarvan 40 vakinhoudelijk.
Er zijn twee manieren waarop een leraar kan aangeven dat hij een PA heeft uitgevoerd:

- door deze zelf onder zijn eigen account in het register op te voeren en te waarderen;
- of door direct aan te klikken, omdat de aanbieder de PA al heeft laten valideren en waarderen.

Met *valideren* wordt bedoeld dat een aangeboden cursus wel of niet geschikt is om in het register te worden aangeboden, en *waarderen* is het inschatten van het aantal registeruren. Het streven van Registerleraar.nl is zoveel mogelijk PA's in het bestand op te nemen zodat er ook een overzicht komt van alle mogelijkheden die er zijn. Ook kan een leraar die de PA heeft opgevoerd, aangeven of deze inderdaad heeft bijgedragen tot zijn professionalisering en de moeite waard is voor collega's.
Omdat er naast heel veel generieke ook heel veel vakinhoudelijke PA's zijn, worden er momenteel subregistercommissies ingesteld. Zo is deze voor wiskunde VO al bijna geïnstalleerd en is de 'SubRC Rekenen VO' nog in opbouw. Ook in deze subregistercommissies heeft steeds een vertegenwoordiger van de vijf lidorganisaties zitting.

Voorbeelden
Ook krijg ik vragen over welke soort PA's dan opgevoerd kunnen worden. Kort gezegd komt het hier op neer: Wordt de docent, leerling, school of beroepsgroep er beter van, dan is dat een PA die in het register kan worden opgenomen.
Hieronder geef ik enkele voorbeelden die ik op mijn school ben tegengekomen:

- de ontwikkeling of uitvoering van de lessen van de WON-klassen [WON staat voor 'Wetenschapsoriëntatie Nederland'; red.];
- de door de school zelf georganiseerde studiedagen, zoals de reken/taal-ochtend en die over ICT of activerende didactiek;
- de door secties georganiseerde studiedagen;
- het opzetten van een rekencursus;
- deelnemen aan de Nationale Wiskunde Dagen;
- deelnemen aan de jaarvergadering/ studiedag van de NVvW;
- vakinhoudelijke bijscholing volgen (bijvoorbeeld via Black Belt, of voor het opzetten van toetsen);
- deelnemen aan een vaknetwerk (bijvoorbeeld het Wiskunde-D Steunpunt);
- zelfstudie (bijvoorbeeld het programma Geogebra leren gebruiken);
- deelnemen aan een scholennetwerk (bijvoorbeeld dat van Cambridge);
- deelnemen aan de audits van andere vo-scholen;
- intervisie;
- deelnemen aan een CLIL-cursus [CLIL staat voor 'Content and Language Integrated Learning'; red.];
- het deelnemen aan cursus om de Engelse taalvaardigheid te vergroten;
- het begeleiden van stagiairs;
- een masteropleiding volgen;
- een excursie voor leerlingen opzetten en begeleiden (bijvoorbeeld naar CERN);
- allerlei commissiewerk (landelijk).



Laat zien wat u waard bent!

Hieronder staan 7 redenen om te registreren op Registerleraar.nl.

1. Zichtbaar vakbekwaam
U bent een bevoegde en vakbekwame leraar die investeert in uw eigen professionele ontwikkeling. Dat betekent dat u goed gekwalificeerd bent en dat ook wilt laten zien. Bij u is het onderwijs in goede handen.

2. Zichtbaar professioneel
Met registratie laat u zien wat uw bevoegdheid is en dat u blijft investeren in uw eigen ontwikkeling. U neemt uw professionele verantwoordelijkheid serieus en bent bereid verantwoording af te leggen aan collega's. Leerlingen, ouders, collega's en schoolleiding, ze kunnen allemaal vertrouwen op uw professionaliteit.

3. Voor een sterke beroepsgroep
De eisen die aan registratie en professionele ontwikkeling worden gesteld, worden door leraren zelf ontwikkeld en bijgehouden. Het is van belang dat deze eisen door overheid en werkgevers worden erkend. Hoe meer leraren aansluiten bij het register, hoe sterker de beroepsgroep.

4. Grip op professionele ontwikkeling
Met behulp van het register kunt u aan uw werkgever zichtbaar maken wat u aan professionele ontwikkeling hebt gedaan en nog gaat doen. Daarmee staat u sterk bij het realiseren van mogelijkheden en middelen en bij de zeggenschap over uw eigen professionele ontwikkeling.

5. Invloed op de kwaliteit van opleidingen en nascholingsaanbod
Als registerleraar kunt u een oordeel geven over de door u gevolgde opleidingen, cursussen, studiedagen en conferenties. Activiteiten die niet bijdragen aan de professionele ontwikkeling van leraren worden door het register geweerd.

6. Ruimte om uw vak uit te oefenen
Doordat u laat zien dat u een vakbekwame professional bent, krijgt u meer ruimte om uw vak uit te oefenen.

7. Erkenning
Doordat u uw vakbekwaamheid kunt aantonen zult u meer erkenning krijgen en kunt u trots zijn op uw vak.

Aan de slag

Redenen genoeg om direct aan de slag te gaan op *www.registerleraar.nl*.

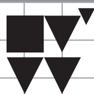
Noot

[1] Marianne Lambriex (2012): *Van de bestuurstafel*. In: *Euclides* 87(7); juni 2012, pp. 327-328.

Info

Op « *www.registerleraar.nl/overregisterleraar* » kan onder meer het 'Reglement Registerleraar' worden gedownload.





Van de bestuurstafel

EUCLIDES EN DE WEBSITE

[Johan Gademan]

Met deze bijdrage wil ik u namens het bestuur van de vereniging informeren over onze plannen met *Euclides* en de website.

Enquête Euclides

In 2011 hebben we uw mening gevraagd over *Euclides*. We vroegen u onder meer: 'Is *Euclides* uw lijfblad of vindt u dat er wel wat aan de inhoud verbeterd kan worden?', en 'Vindt u de papieren vorm inmiddels hopeloos ouderwets en leest u het liever op uw pc of iPad?'
Op deze enquête hebben 100 lezers gereageerd. De globale conclusies die we uit uw reacties hebben mogen trekken, zijn:

- *Euclides* wordt goed en intensief gelezen.
- De papieren versie moet blijven.
- *Euclides* wordt bewaard en gedeeld.
- *Euclides* wordt geregeld door opleidingsdocenten onder de aandacht van studenten gebracht.

Naar aanleiding van deze enquête is er geen grond voor ingrijpende wijzigingen. De leden die gereageerd hebben, zijn positief over ons blad. Er kwamen met de reactie op onze vragen een aantal zeer interessante suggesties binnen, zoals:

- nieuwe uitdagender vormgeving;
- sommige actuele rubrieken naar de website verplaatsen;
- samenvattingen op internet zetten van sommige artikelen uit de nieuwe jaargang met interessante links;
- oude jaargangen van *Euclides* digitaal beschikbaar en doorzoekbaar maken; dus niet alleen pdf's, liefst samen met andere wiskundetijdschriften.

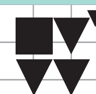
Deze suggesties vonden we waardevol genoeg om te kijken of we ze kunnen honoreren.

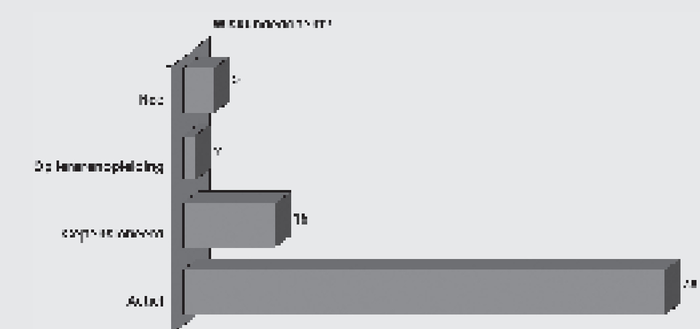
Informeren en consulteren

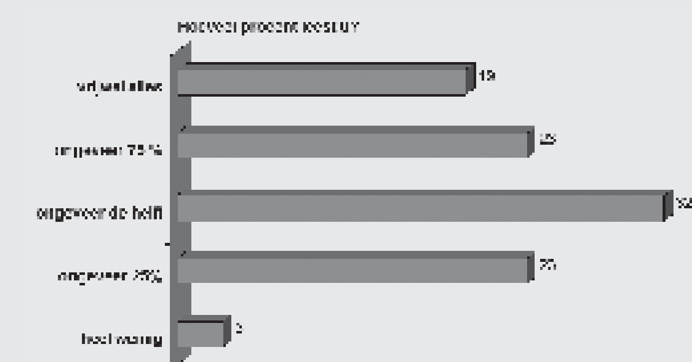
Euclides kent een productietijd van 6 tot 8 weken. Daardoor moet de redactie verstandig omgaan met nieuwsgevoelige onderwerpen. Niettemin zouden wij als bestuur u eerder of sneller willen informeren over relevante onderwerpen en omgekeerd over sommige onderwerpen zouden we snel uw mening willen weten. We missen een geschikt middel om u snel te informeren en te consulteren. Natuurlijk hebben we een website en ook Twitter. Maar nieuws via Twitter is vaak vluchtig en voor nieuws op de website zijn we afhankelijk van de leden die onze site bezoeken. We hebben niet het idee dat we met Twitter en onze website al onze leden bereiken op die momenten dat het nodig is. Het bestuur wil leden sneller en op maat informeren. We denken hierdoor de betrokkenheid van de leden bij de activiteiten van de NVvW te vergroten en ook sneller respons te krijgen op vragen of voorstellen.

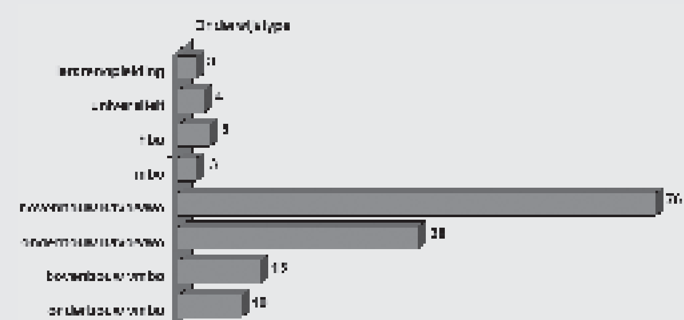
Nieuwe plannen

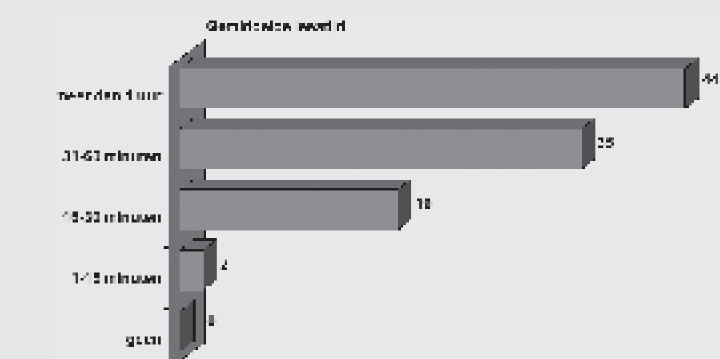
De afgelopen maanden is in overleg met direct betrokken (redactie *Euclides*, webmasters, ledenadministratie) een aantal plannen uitgewerkt en inmiddels in gang gezet. Onze website en *Euclides* blijven natuurlijk bestaan, maar ze worden gemoderniseerd. Onze site is soms wat traag, en niet alles wat we willen kan meer met deze site. *Euclides* krijgt een nieuwe vormgeving. Maar er verandert meer. Onze site krijgt een nieuwsbrieffunctie, waardoor we in staat zijn nieuwsberichten en vragen naar uw e-mailadres te sturen. Ook gaan we onze ledenadministratie koppelen aan de website. We hebben nu een dubbele registratie van leden en dat is niet handig. We zijn aan het nadenken welke onderdelen op de site kunnen komen te staan, waardoor naslag en opslag voor u makkelijker is.
Deze plannen worden nu allemaal vormgegeven en moeten komend schooljaar voor u zichtbaar worden. We zouden het fijn vinden als leden meekijken en de vorderingen becommentariëren. Heeft u belangstelling?
Meld u bij me aan via « *j.gademan@nvvw.nl* » of via « *secretaris@nvvw.nl* ».

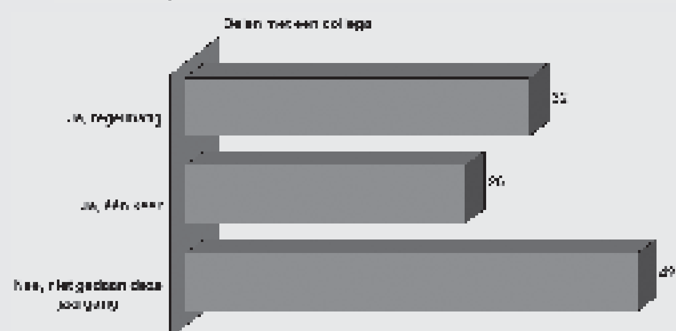





ongeveer de helft
19
32


universiteit
38


44
18
geen



PUZZEL 88-5
HET SCHEVE TOPJE VAN EEN KEGEL

[Wobien Doyer en Lieke de Rooij]

Als definitie van een kegelsnede geeft Google de volgende vertaling uit het Engels [1]:
Een kegelsnede is een curve die wordt verkregen als het snijpunt van een kegel (meer bepaald, een rechts circulair kegelvlak) met een vliegtuig.
De puzzel gaat echter over de berekening van de inhoud van het topje van een scheef doorgesneden kegel met een vlak. Het is niet zozeer een puzzel, maar een meetkundig vraagstuk. Hoewel, is dat niet hetzelfde?
Naast een algebraïsche aanpak met een integraal is een analytische (wiskunde-D) of zuiver meetkundige aanpak (wiskunde-B) ook heel goed mogelijk. De laatste twee blijken hier sterk in het voordeel.
De opgave is: *Bepaal een formule voor de inhoud I van het topje van een scheef afgesneden kegel.*
Dit lijkt een klassiek vraagstuk, maar op internet of in standaard boeken hebben we hierover vrijwel niets kunnen vinden (wie wel?), behalve natuurlijk de bekende formule:
I = ⅓ × (*oppervlakte grondvlak*) × *hoogte*
We zoeken nu een algemene formule voor de inhoud als de vorm van de kegel en snijvlak (richting en hoogte) bekend zijn. Het resultaat blijkt een verrassend mooie formule, vandaar deze opgaven.

Om warm te lopen beginnen we met een regelmatige vierzijdige piramide met vierkant grondvlak en top T; ***zie figuur 1***.
We willen de figuur beschrijven zonder daarbij afhankelijk te zijn van het oorspronkelijke grondvlak en kiezen daarom voor het vastleggen van de piramide de tangens t van de halve tophoek, de hoek die de zijvlakken maken met de as. In de oorspronkelijke piramide is t natuurlijk gelijk aan de helft van de horizontale ribbe gedeeld door de hoogte.
We snijden een topje van de piramide scheef af met een vlak V, zodanig dat de snijlijn van V met (het verlengde van) het oorspronkelijke grondvlak evenwijdig is met twee van de zijden van dat grondvlak. Ofwel twee van de snijlijnen van V met de zijvlakken van de piramide zijn onderling evenwijdig en staan loodrecht op de as van de piramide.
Het vlak V wordt dan vastgelegd door de afstanden (a en b) van die twee snijlijnen tot de as. De vorm van de piramide wordt bepaald door t. Het is niet moeilijk aan te tonen dat als $a = b$ geldt: $I = \frac{4a^3}{3t}$.

Opgave 1
Gegeven een regelmatige vierzijdige piramide met tangens halve tophoek gelijk aan t en vlak V zoals boven beschreven. We zoeken een formule voor de inhoud I van het door V van de piramide afgesneden topje als a, b en t zijn gegeven.
a. Bereken I als $a = 1$, $b = 2$ en t = ¼.
b. Bepaal een algemene formule voor I als a, b en t zijn gegeven.
Leg ook uit hoe u aan die formule bent gekomen.

Tip – U krijgt een leuke formule als u het rekenkundig gemiddelde $R = ½(a + b)$ en het meetkundig gemiddelde $M = \sqrt{(ab)}$ van a en b gebruikt.

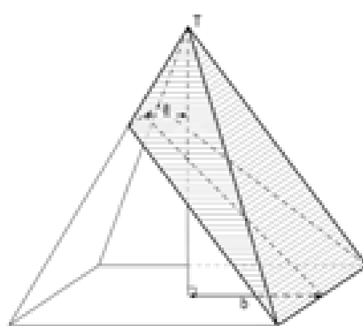
Nu de kegel.
Het 'oorspronkelijke' grondvlak van de kegel is een cirkel en de top ligt daar recht boven. We kiezen om de kegel vast te leggen weer de tangens t van de halve tophoek. Het vlak V kiezen we zo dat de doorsnede met de kegel een ellips is; ***zie figuur 2***.
Kijken we naar de eindpunten A en B van de lange as van die ellips, dan wordt het afgesneden topje vastgelegd door de afstanden (a en b) van A en B tot de as van de kegel. Als het vlak V loodrecht staat op de as, geldt $a = b$, en dan is het niet moeilijk aan te tonen dat $I = \frac{\pi a^3}{3t}$.

Opgave 2
Gegeven een kegel waarvan de halve tophoek tangens t heeft. We snijden hem met een vlak V zoals boven beschreven.
- Bepaal een formule voor de inhoud I van het door het vlak van de kegel afgesneden topje, weer als a, b en t gegeven zijn. Leg ook hier uit hoe u aan die formule bent gekomen.

Tip – Als u hier ook gebruik maakt van de gemiddelden *M* en/of *R* van *a* en *b*, kan u de fraaie formule krijgen waarvoor deze puzzel is opgezet.

Het lijkt ook voor de hand te liggen om de inhoud van zo'n scheef afgesneden kegeltopje met een integraal te berekenen. Dat is veel lastiger dan de meetkundige of analytische aanpak, maar het kan wel.
Het wordt al iets makkelijker als u getallen kiest voor *a*, *b* en *t*.
Dan is de uitkomst met een grafische rekenmachine te benaderen en te controleren met uw formule uit opgave 2.
Omdat dit niet de handigste manier is om de formule te bepalen, laten we het opstellen van de dubbele integraal en vooral het primitiveren daarvan echter aan de *diehards* over, buiten de puntentelling om. We zijn natuurlijk wel benieuwd hoever u hiermee kan komen.

Inzenden oplossingen
Oplossingen kunt u mailen naar *liekewobien@hotmail.nl* of opsturen naar L. de Rooij, Oudeweg 27, 2811 NN Reeuwijk.
Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen en u kunt weer extra punten verdienen door bruikbare ideeën voor een nieuwe puzzel in te sturen.
De persoon die het hoogst op de ladder staat, ontvangt een boekenbon ter waarde van 20 euro.
De deadline is **15 april** a.s. Veel plezier.



figuur 1



figuur 2

Noot
[1] Zie WikipediA (*http://en.wikipedia.org/wiki/Conic_section*):
(…) a conic section (…) is a curve obtained as the intersection of a cone (more precisely, a right circular conical surface) with a plane.

OPLOSSING VAN 88-3
SIMPELE SOMMEN

[Wobien Doyer en Lieke de Rooij]

Simpele sommen

I) $62^2 - 15^3 = 622 - 153 = 469$

II) $\frac{654}{545} = \frac{6}{5}$

III) $\frac{33}{58} \times \frac{88}{87} = \frac{3388}{5887} \quad (= \frac{484}{841})$

Bereken nu zelf

I	$6^2 - 4^2 =$	$7^2 - 3^2 =$	$8^2 - 2^2 =$	II	$\frac{1919}{9595} =$	$\frac{2666}{6665} =$	[illegible]
I	$9^2 - 1^2 =$	[illegible]	[illegible]	II	[illegible]	[illegible]	[illegible]
I	[illegible]	[illegible]	[illegible]	II	[illegible]	[illegible]	
I	[illegible]	[illegible]		III	[illegible]	[illegible]	[illegible]
II	$\frac{16}{64} =$	$\frac{19}{95} =$	$\frac{26}{65} =$	III	[illegible]	[illegible]	[illegible]
II	$\frac{49}{98} =$	[illegible]	[illegible]	III	[illegible]	[illegible]	[illegible]

De bedoeling was om ter bevordering van de rekenvaardigheid een lijst met opgaven te maken waarbij allerlei ongeoorloofde handelingen toch tot een goed antwoord leiden. Een bloemlezing van door de inzenders gevonden sommen vindt u hierboven bij ‘Bereken nu zelf’. Leuk voor een alternatieve rekenles?
Er waren 11 inzenders, onder wie een ‘nieuwe’: Frits Göbel!

Type I

Die kleine cijfertjes zingen een toontje lager.
a. Bepaal alle mogelijke opgaven met het verschil van twee kwadraten. Dit heeft eenieder herleid tot $a^2 - b^2 = 10(a - b)$. Links en rechts delen door $a - b$ geeft $a + b = 10$. Met $0 < b < a < 10$ zijn er dan vier mogelijkheden. Deze opgave is wellicht een aardige variatie om uw leerlingen voor te leggen bij de behandeling van merkwaardige producten.
b. Bepaal een algoritme om oneindig veel opgaven te maken waarbij $a^1 - b^0 = (10a + 1) - (10b + 0)$, dus $10b - 9a = 2$. Om alle oplossingen te vinden moest u die diophantische vergelijking oplossen. Dat geeft positieve oplossingen $a = 2 + 10t$ en $b = 2 + 9t$ voor alle gehele $t > 0$.

Type II

Gelijke cijfers worden tegen elkaar weggestreept.
a. Teller en noemer bestaan uit twee cijfers waarvan we er één weg kunnen strepen. Bepaal zo veel mogelijk van deze opgaven.
Er zijn vier mogelijkheden:
$\frac{ab}{ac}, \frac{ab}{ca}, \frac{ab}{bc}$ of $\frac{ab}{cb}$. Bij de eerste en de laatste blijken teller en noemer gelijk, dus er blijft niets over na wegstrepen. De tweede en derde geven inverse oplossingen, zodat we maar één van de twee hoeven op te lossen:
$\frac{10a+b}{10c+a} = \frac{b}{c} \Rightarrow 9bc = a(10c - b)$
Dus ook in het rechter lid moet een 9-voud staan:
$a = 9 \Rightarrow bc = 10c - b$
Frits Göbel zet dit om in $(c + 1)(10 - b) = 10$ waaruit volgt dat $c + 1 = 2$ of $c + 1 = 5$. Dit geeft de oplossingen $\frac{95}{19}$ en $\frac{98}{49}$. Met $a = 6$ komt hij op de vergelijking $(3c + 2)(20 - 3b) = 40 = 5 \times 8$. Dit geeft $c = 1$ en $b = 4$ óf $c = b = 6$ en er blijf weer niets over. Of $c = 2$ en $b = 5$. Hiermee vind je de oplossingen $\frac{64}{16}$ en $\frac{65}{26}$.
In totaal zijn er dus 4 oplossingen en hun inversen.
b. De bedoeling was: Hoe kan u aan uw oplossingen bij IIa cijfers toevoegen aan teller en noemer zodat er oneindig veel nieuwe opgaven ontstaan. Er zijn meerdere mogelijkheden, maar oneindig was genoeg.

- Een eenvoudige is: plaats achter teller en noemer een gelijk aantal nullen.
- Herhaal de cijfers van teller en noemer, zoals $\frac{1919}{9595}$.
- Geschrapt cijfer herhalen: $\frac{2666}{6665}$.
- Voeg een veelvoud van de teller en noemer van de vereenvoudigde breuk toe, mits daarvan niets kan worden weggestreept. Voorbeeld $\frac{49}{98} = \frac{1}{2}$. Zet dan enen voor de teller en tweeën voor de noemer zoals $\frac{1149}{2298}$ of $\frac{3349}{6698}$. Let op: $\frac{2249}{4498}$ mag niet! Het mag er ook achter, soms met toevoeging van een 0, dus bijvoorbeeld $\frac{4906}{9812}$.
- Combinaties van bovengenoemde methoden.

Type III

Concatenatie van tellers en noemers: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{\overline{ac}}{\overline{bd}}$, waarbij a, b, c en d cijfers voorstellen. Dus: $\frac{a \times c}{b \times d} = \frac{10a+c}{10b+d}$. Bepaal zo veel mogelijk opgaven.

Hans Linders en **Leo Pos** geven een slimme manier met weinig risico om oplossingen te vergeten. Dit deden ze door de variabelen te scheiden. Er moet gelden:

$$\frac{10a+c}{ac} = \frac{10b+d}{bd}$$

Het getal $k = \frac{10p+q}{pq}$ moet dus bij 2 verschillende paren p en q dezelfde waarde aannemen. Vervolgens maken zij een tabel met de waarden van k voor alle waarden van p in {1, 2, …, 9} en q in {1, 2, …, 9} en zoeken naar waarden van k die twee keer voorkomen in de tabel. Er blijken 7 paren te zijn. Zo vinden ze bijvoorbeeld $k = 3\frac{1}{2}$ bij $(p, q) = (1, 4)$ en bij $(p, q) = (6, 3)$. Daaruit volgt dat $a = 1$, $c = 4$ en $b = 6$, $d = 3$. Zo zijn er dus 7 verschillende oplossingen en hun inversen.

Een alternatief waarbij minder dan de helft van zo'n tabel hoeft te worden ingevuld, is de vergelijking $\frac{a \times c}{b \times d} = \frac{10a+c}{10b+d}$ te herleiden tot $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = 10(\frac{1}{c} - \frac{1}{d})$ We mogen aannemen dat $a > b$ en dus $d > c$. Laat $k = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ zijn met $1 \le p < q \le 9$; dan geldt zeker $0{,}01 < k < 1$ en moet $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} > \frac{1}{10}$ en $\frac{1}{c} - \frac{1}{d} < \frac{1}{10}$. Als $k > 0{,}1$ zet dan k in de tabel bij (p, q) en als $k < 0{,}1$ zet $10k$ in de tabel bij (q, p). Ook hier zoeken we naar gelijke waarden, nu onder en boven de diagonaal $(p = q)$.

Het viel meerdere inzenders op dat de oplossingen met twee gelijke cijfers bij III terugkomen bij IIa. Dat is inderdaad gemakkelijk aan te tonen.

Sommige inzenders hebben met de computer nog verder gezocht naar andere kloppende opgaven. Enkele daarvan staan ook bij de lijst simpele sommen.

Extra

Ooit was er een leerling die opmerkte: 'Ik heb die kleine cijfertjes maar weggelaten.' Ook daarmee zou u nog opgaven kunnen bedenken die dan het juiste antwoord opleveren.

Ladderstand

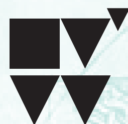
De top-10 van de ladder is nu:

J. Verbakel 93
H. Bakker 90
L. Pos 79
G. Riphagen 76
J. Remijn 69
T. Kool 57
R. Stolwijk 47
H. Klein 47
K. Verhoeven 44
W. van den Camp 43

Jan Verbakel verdient de boekenbon. Proficiat. Frits Göbel verdiende nog extra punten voor z'n grote bijdrage aan puzzel 88-1.

SERVICEPAGINA

Publicaties van de Nederlande Vereniging van Wiskundeleraren



Zebraboekjes

1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christiaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde
21. Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde
22. Spelen en Delen
23. Experimenteren met kansen
24. Gravitatie
25. Blik op Oneindig
26. Een Koele Blik op Waarheid
27. Kunst en Wiskunde
28. Voorspellen met Modellen
29. Getallenbrouwerij
30. Passen en Meten met Cirkels
31. Meester Ludolphs Koordenvierhoek
32. Experimenteren met rijen
33. Ontwikkelen met Kettingbreuken
34. De Ster van de dag gaat op en onder

Zie verder ook *www.nvvw.nl/page.php?id=7451* en/of *www.epsilon-uitgaven.nl*

Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo

Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

Voor overige internet-adressen zie:
www.wiskundepersdienst.nl/agenda.php

Forum op de NVvW-site:
www.nvvw.nl/forum.html

Kalender

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de eindredacteur, het liefst via e-mail (*dklingens@gmail.com*). Hieronder staan de verschijningsdata van *Euclides* in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdatum is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de *eind*versies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook *www.nvvw.nl/euclricht.html*

jaargang 88

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
6	14 mei 2013	19 mrt 2013
7	25 juni 2013	29 apr 2013

vrijdag 5 april, RU – Nijmegen
49e Nederlands Mathematisch Congres
Organisatie KWG en Radboud Universiteit

donderdag 11 april, regionaal
Correctiecursus
Organisatie NVvW
Zie pag. 211 in Euclides 88(4).

vrijdag 12 april, UvA – Amsterdam
Congres: Leve de wiskunde!
Organisatie KdVI en ILLC

woensdag 10 april, Utrecht
Wetenschap & Techniek academie
Organisatie FIsme

woensdag 17 april, op de scholen
Grote Rekendag
Organisatie FIsme

zaterdag 20 april, Utrecht
Symposium XIX: Allemaal aansluiten, graag!
Organisatie NVvW-werkgroep Geschiedenis van het Reken- en Wiskunde-Onderwijs (voorheen HKRWO)
Zie pag. 257 in dit nummer.

vrijdag 26 april, Leiden
Nascholingsdag / Projectieve meetkunde
Organisatie Mathematisch Instituut van de Universiteit Leiden

vr. 26 en za. 27 april, midden van het land
Cursus: Wiskundedidactiek in de praktijk
Organisatie APS

maandag 13 mei, Nijmegen
Nascholing: WiskundeDialoog 2013
Organisatie ILS en Radboud PUC of Science
Zie pag. 180 in Euclides 88(4).

vrijdag 17 mei, op de scholen
CE havo wiskunde A, B (13:30-16:30u)
Organisatie CvE

woensdag 22 mei, op de scholen
CE vmbo-KB/GL/TL wiskunde (13:30-15:30u)
CE vwo wiskunde A, B en C (13:30-16:30u)
Organisatie CvE

vrijdag 24 mei, op de scholen
CE vmbo-BB wiskunde (9:00-10:30u)
Organisatie CvE

vrijdag 7 juni, Utrecht
Wiskunde D-dag
Organisatie PWN

Expert in rekenen!



Noordhoff Uitgevers

Noordhoff Uitgevers

Rekencongres

U bent er toch ook bij?

Woensdag 3 april
NBC in Nieuwegein



Meld u nu aan via
www.nurekencongres.nl

Noordhoff Uitgevers werkt voor de docent